مقدمه

امروزه در شاخه های گوناگون علوم سعی می شود تا مفاهیم اساسی را به زبان ریاضی بیان نمایند و قالبی ریاضی برای آن پیدا کنند تا بتوانند وجود آنها را منطقی و به صورت ساختاری منسجم و مستقل درآورند و به پیشرفت های سریعتری دست یابند.

ریاضیات مجزا یکی از شاخه های پرکاربرد و جذاب ریا ضیات است که در رشته های مختلف علوم کمپیوتری موارد استفاده ی گسترده ای داشته و حل مسایل بعضی از علوم کاربردی و فنی بدون داشتن درک صحیح از مباحث ریاضیات مجزا دشوار و گاهی غیر ممکن به نظر می رسد. از همین جهت است که در برنامه ی درسی کمپیوتر در همه ی کشور های جهان ، ریاضیات مجزا جایگاه خاص خود را دارا می باشد.درک مباحثی مانند سخت افزار، مدار های منطقی کمپیوتر ، مبحث درختها در ساختار دیتا و ده ها مباحث دیگر بدون داشتن اطلاعات عمیق از ریاضیات مجزا تقریباً غیر ممکن است.

یکی از توانایی های مهم ریاضیات مجزا قدرت مدل سازی آن است که با استفاده از آن به بیان دقیق مسایل پرداخته و سپس با ابداع الگوریتم های مناسب و پیاده سازی کامپیوتری آن ها به حل مسایل پرداخته است. الگوریتم هایی مختلفی که در ریاضیات مجزا مطرح هستند ، پل ارتباطی انکار ناپذیری بین علوم کاربردی و علوم کامپیوتری ایجاد می کنند. به گونه ی مثال ، درخت ها در رشته های مختلفی مانند کیمیا، مهندسی برق و علم محاسبه کاربرد دارد. برعلاوه از تیوری آن در لوله کشی نفت ، لوله کشی گاز ، ایجاد کانال های آبرسانی ، دیزاین را ه های ارتباطی بین شهر های یک کشور ، دیزاین نقشه های مترو های شهرها ، و ده ها مورد دیگر به طور وسیعی استفاده می شود.

تدریس ریاضیات مجزا در کشور های پیشرفته در دوره ی مکاتب ، در کشور همسایه ی ما، ایران در دوره ی پیش دانشگاهی و در کشور عزیر ما، افغانستان در دوره ی پوهنتون صورت می گیرد. لازم به تذکر است که تدریس ریاضی مجزا در کشور ما سابقه ی چندانی ندارد و از چند سالی بدین طرف تدریس آن در دیپارتمنت های مختلفه ی پوهنځی کمپیوتر ساینس پوهنتون کابل و دیگر پوهنتون های افغانستان مروج گردیده است.

مطالب لکچرنوت حاضر در چهار فصل ترتیب و تنظیم گردیده است..در فصل اول به تیوری گرافها پرداخته شده و مسایل بسیاری حل گردیده است. در فصل دوم درخت ها به طور مشروح مورد بحث و مداقه قرار گرفته است و در پایان فصل تمرینات زیادی به عنوان کار خانگی به محصلان واگذار گردیده است. در فصل سوم رابطه ها و انواع آن به طور مفصل مورد بحث و بررسی قرار گرفته و مسایل فراوانی برای رهنمایی محصلین حل گردیده است. در فصل چهارم جبر بولین مورد بحث قرار گرفته و مثال های فراونی در مورد آن حل گردیده است. در فصل نامبرده اصول جبر بولین ، مدار های منطقی کمپیوتر ، ساده ساختن مدار های منطقی کمپیوتر، دیاگرام کارنو و ده ها مسایل دیگر تجزیه و تحلیل گردیده است.

امیدوارم که مطالب این لکچر نوت مورد استفاده ی محصلان رشته های کمپیوتر و ریاضی و سایر علاقه مندان قرار گیرد.

فصل اول

گراف ها (Graphs)

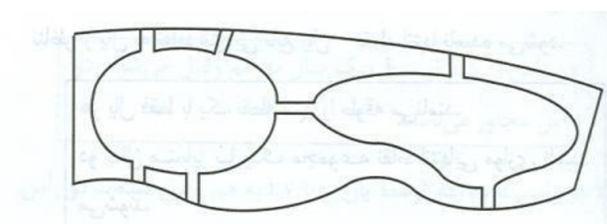
گراف(Graph)

گراف يكي ازشاخه هاي رياضي است كه تاريخی بسيار كوتاه اما رشدي بسيار وسيع دارد.هر چند كه ريشه اين علم را ميتوان در زمان اويلر(1707-1783) يافت اما به طور جدي از سالهاي 1930 به بعد اين علم مورد توجه رياضيدانان قرار گرفت وبه صورت يك شاخه ازرياضيات نمايان شد. نظريه ی گراف ها امروزه درزمينه هاي مختلف علوم ديگر مانند اقتصاد، ژنتيك، علوم روانشناسي، جامعه شناسي، مدلسازي انرژي، انتقال اطلاعات وبرنامه ريزي هاي گوناگون كاربرد دارد. به همين دليل اكنون يكي از جذاب ترين شاخه هاي رياضيات وعلم كامپيوتر به حساب مي آيد. درواقع نظريه گراف ها مدلي رياضي براي يك مجموعه گسسته مي سازد كه عناصر آن به طريقي به يكديگر مرتبط شوند.

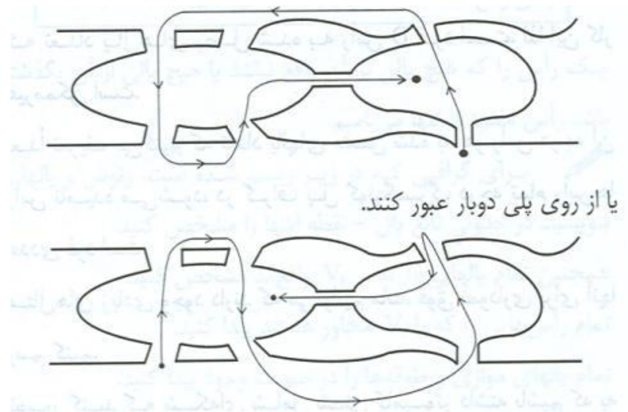
به عبارت ديگر گراف ها وسيله ای توانا دربررسي و مطالعه ساختار روابط بين عناصر ست ها مي باشند.

به همين دليل نظريه ی گراف ها در ابتدا به عنوان ابزاري براي فرمول بندي مسايل و تعريف روابط متقابل بين آنها به كار مي رود و پس از آن كه مسأله به زبان رياضي فرمول بندي شد حل آن و يا پاسخگويي به آن ساده خواهد بود. شايد يکی از اين معما هاي حل شده همان مسأله معروف هفت پل كونيگسبرگ (Königsberg) است، كه توسط اويلر (Euler) حل گرديد.

در قرن هيجدهم ميلادی شهركونيگسبرك در پروس شرقی (حالا در روسيه واقع بوده و به نام كالينینگراد Kaliningrad معروف است) و در دهانه رودخانه پرگل (pregel) قرار داشت. كونيكسبرگ از دو ساحل یک رودخانه و دو جزيره تشکيل شده بود كه در آن زمان هفت پل اين چهار منطقه را مانند شكل زير به هم وصل می كرد.

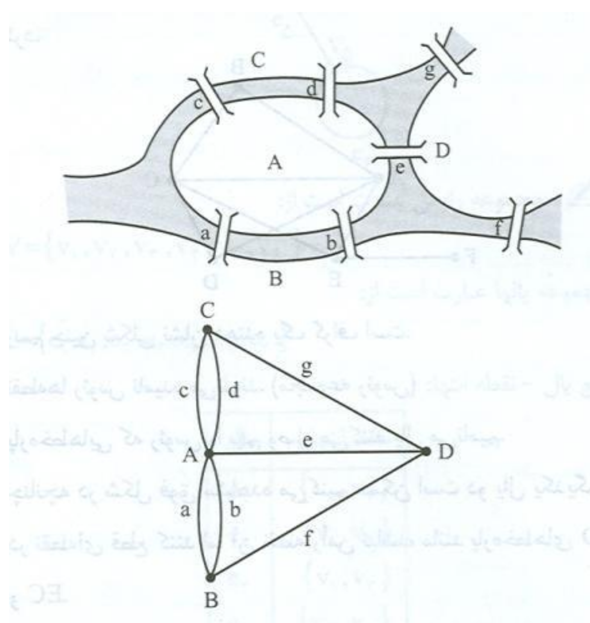


مردمي كه دراطراف اين جزيره قدم مي زدند، دريافته بودند كه اگر آنها مثلاً از ساحل جنوبي رودخانه شروع به قدم زدن بكنند وطوري برنامه ريزي كنند كه روي هر پل دقيقاً يك بار عبور كنند بايد حداقل يك پل را ناديده بگيرند.



این براي مردم روشن شده بود كه نميوانند از روي هر پل دقيقاً يك بار عبور كنند، اما هيچ كس مطمئن نبود
سر انجام درسال 1753، فردي مسأله را براي لئناردواويلر رياضيدان بزرگ سويسي فرستاد. اويلر مساله را حل و به اين تلاش ها خاتمه داد.

درشكل زير گراف متناظر با خشكي ها، پل ها را در كونيگسبرگ به اين صورت رسم كرده ايم كه هر نقطه را به عنوان نقطه اي از خشكي كه به آن وارد مي شويم در نظر مي گيريم وآن را رأس مي ناميم.
هرپل بين دو نقطه خشكي را با پاره خطي به هم وصل مي كنيم كه آن را يال مي ناميم.



لذا، به بيان گرافي مسأله به اين صورت تبديل مي شود كه آيا مي توان از يك رأس شروع كرده و با گذر از هر يال(يا پل) فقط يك بار، به آن رأس برگشت؟

اويلر ثابت كردكه اين كار غير ممكن است.

وقتي از يك رأس (vertex) شروع مي كنيم چون از هر يال (edge) فقط يك بار عبور مي كنيم، پس به دفعاتي كه به يك رأس وارد مي شويم بايد به همان دفعات هم ازآن رأس خارج شويم، به عبارت ديگر بايد به هر رأس تعداد يالهاي وصل شده جفت باشد تا اين كار امكان پذير باشد، درحالي كه تعداد يال هاي وصل شده به رأس D تاق است، لذا اين كار غير ممكن است.

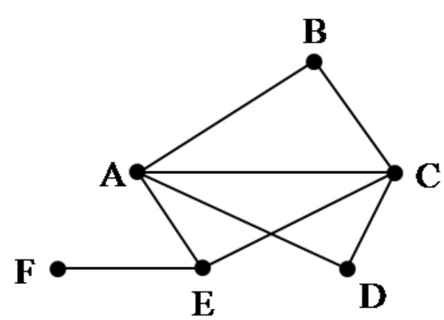
بعداً تعريف مي كنيم كه تعداد يالهاي متصل شده به هر رأس درجه آن رأس ناميده مي شود، درگراف پل كونيگسبرگ درجه تمام رأس ها عددي تاق است.

مثال های زيادي وجود دارند كه مي توانيم مانند فوق نمايش تصويری براي آنها رسم كنيم.

تصور كنيد كه شبكه اي شامل شش كامپيوترداشته باشيم كه به صورت هاي زير به يكديگر متصل شده باشند:

كامپيوترA به كامپيوترهايB، C ،D و E متصل است.
كامپيوتر B به كامپيوترهاي A وC متصل است.
كامپيوترC به كامپيوترهايA،B ،Dو E متصل است.
كامپيوترD به كامپيوتر هاي A وC متصل است.
كامپيوتر F به كامپيوتر E متصل است.

درشكل زير به راحتي مي توان وضعيت اتصال كامپيوتر ها را مشاهده كرد.

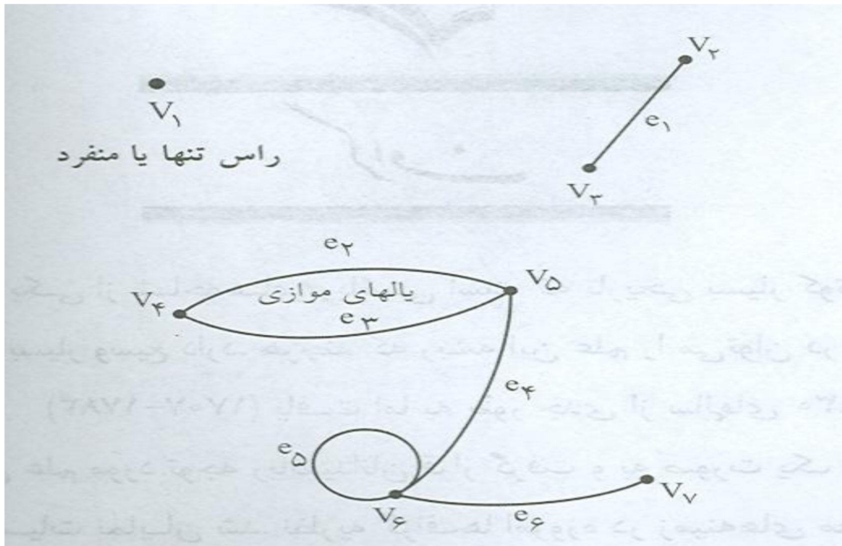


رسم چنين شكلی نشان دهنده يك گراف است.

نقطه ها رئوس (vertices) ناميده مي شوند.(ست رئوس) پاره خط ها يي كه رئوس را بهم وصل مي كنند يالها (edges) مي ناميم. چنانچه درشكل فوق مشاهده مي كنيم ممكن است دويال يكديگر را درنقطه اي قطع كنند اما آن نقطه رأس نباشد، مانند پاره خط هاي AD و EC . توجه داشته باشيم كه اين نوع شكل ها يا نمايش های تصويری ای كه دراينجا بحث مي كنيم كاملاً از نمايش های تصويری معادلات يا توابع متفاوت هستند.

درحالت كلي، يك گراف شامل ست اي ار رئوس وست اي از يالها است كه رئوس مختلف رابه هم وصل مي كنند.

يالها ممكن است، خط راست يا منحني باشند، كه يك رأس را به رأس ديگر متصل مي كنند يا حتي ممكن است يك رأس را به خودآن رأس وصل كند، چنانكه درشكل زير مشاهده مي كنيد.



دراين شكل هر رأس را به v_i وهريال رابه e_i نشان داده ايم.
وقتي يالي يك رأس را به خودش وصل مي كند آن راطوقه مي نامند، مانند e_5. وقتي دورأس با دويال بهم وصل شوند آن دويال را موازي مي نامند مانند يالهاي e_2 وe_3. ممكن است رأسي به هيچ رأس ديگري وصل نشده باشد دراين صورت آن رأس را رأس منفرد يا تنها مي نامند مانند رأسv_1 .اكنون گراف را به طور رسمي در زير تعريف ميكنيم.

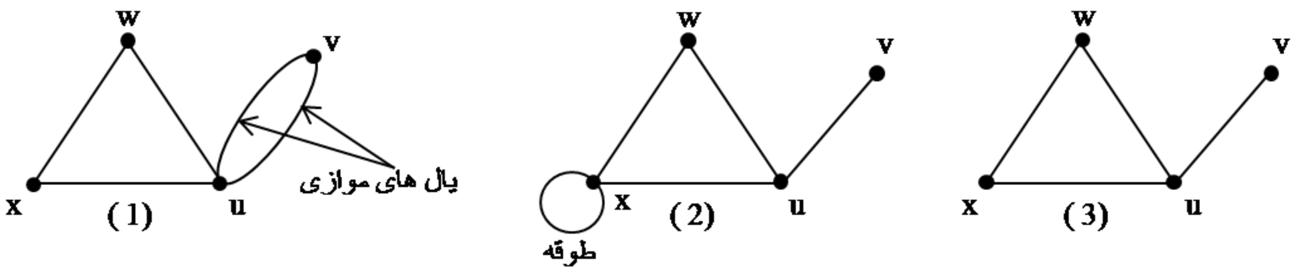
يك گراف G شامل دوست متناهي است:
يك ست غير خالی $V(G)$ كه عناصر آن را رئوس (vertices) مي ناميم و يك ست $E(G)$ كه عناصر آن را يالها (edges) مي ناميم (ممكن است $E(G)$ خالی نيز باشد). هريال دو رأس را به هم يا يك رأس را به خودش متصل ميكند.

به طور غيررسمي مي توان گفت يك گراف ست اي از نقاط است، به طوري كه بعضي جفت نقاط به وسيله پاره خطي به هم متصل شده اند. به طور دقيق درهر گراف هر يال متناظر است با يك ست شامل يك يا دو رأس كه آنها را نقاط انتهايي مي نامند.

تناظر از يال به نقاط انتهايي (endpoints) تابع يال - نقطه انتها ناميده مي شود.

هر يال فقط با يك نقطه انتها را طوقه يا حلقه (loop) مي نامند.
دويال متمايز با يك ست نقاط انتهايي موازي ناميده مى شوند.

يعني دريك گراف هردو يالي كه يك جفت رأس را به هم وصل مي كنند موازي مي ناميم. وهر يالي كه يك رأس را به خودش متصل ميكند طوقه گوييم.



گراف(1) داراي يال هاي موازي است و گراف(2) داراي يك طوقه است. گراف(3) طوقه و يال هاي موازي ندارد.

گرافي مانند شكل(3) را يك گراف ساده مي نامند. بنابراين تعريف زير رادariم:

تعريف گراف ساده (simple graph):

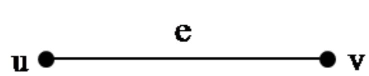
يك گراف را كه داراي دو يال موازي وطوقه نباشد گراف ساده مينامیم.

گراف هاي (1) و(2) كه در بالا نشان داده ايم ساده نمي باشند. اگردرگراف G، $u,v\in V(G)$ و $\{u,v\}\in E(G)$ آنگاه u وv دو رأس و$\{u,v\}$ يك يال است، گاهي براي سادگي$\{u,v\}$ رابه صورت uv نيز مي نويسيم در اين حالت گوييم يالuv از رئوس u وv مي گذرد. u وvهمان دو انتها يا دو سر يال uv مي باشند كه قبلاً تعريف كرديم.

دو رأس را كه توسط يك يال به هم وصل مي شوند دو رأس مجاور مي نامند.

مثلاً دورأس u و v كه توسط يال e يا uv به هم وصل شده اند دو رأس مجاور مي باشند.

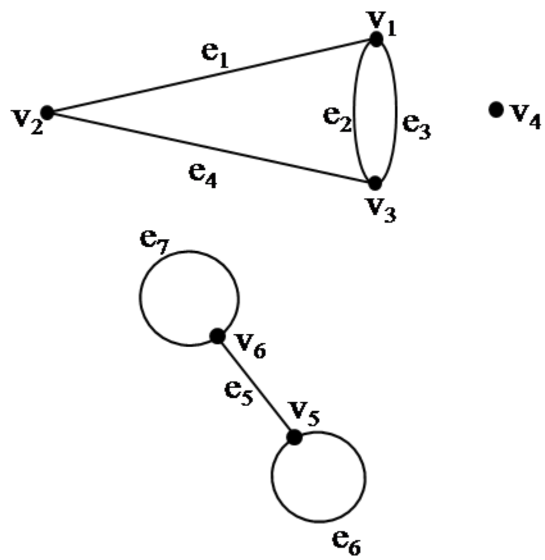
يك رأس را كه طوقه داشته باشد گوييم با خودش مجاوراست.



هر دو يال را كه بر يك نقطه انتها واقع شده باشند (بريك رأس واقع شده باشند) يالهاي مجاورمي ناميم.

يك رأس را كه هيچ يالي بر آن واقع نباشد يا هيچ يالي از آن نگذشته باشد رأس منفرد يا تنها مي ناميم.

مثال1: براي گرافي كه در زيررسم شده است، رئوس و يالها را بنويسيد. درجدول تابع يال ـ نقطه انتها را مشخص كنيد.همچنين تمام يالهايي را كه بر V_1 واقع اند مشخص كنيد. تمام رأس هايي را كه با V_1 مجاور هستند پيدا كنيد. تمام يالهاي موازي و طوقه ها را در صورت وجود پيدا كنيد.



حل : ست رئوس عبارت است از:

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6\}$

ست يالها عبارت است از: $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6, e_7\}$

تابع يال ـ نقطه انتها:

نقاط انتهايي	يال
$\{v_1 ,v_2\}$	e_1
$\{v_1 ,v_3\}$	e_2
$\{v_1 , v_3\}$	e_3
$\{v_2 ,v_3\}$	e_4
$\{v_5 ,v_6\}$	e_5
$\{v_5\}$	e_6
$\{v_6\}$	e_7

توجه داشته باشيد كه رأس منفرد v_4 دراين جدول مشاهده نمي شود. اگرچه هر يال بايد يك يا دو نقطه انتها داشته باشد اما يك رأس ممكن است نقطه انتهايي هيچ يالي نباشد.

براي پاسخ به موارد بعدي گوييم:

e_1، e_2 و e_3 يالهای واقع بر v_1 هستند.
v_2 و v_3 با v_1 مجاور هستند.
e_2، e_3 و e_4 مجاور هستند.
e_6 و e_7 طوقه هستند.
e_2 و e_3 موازي هستند.
v_5 و v_6 با يكديگر مجاورند.

واضح است كه گراف مثال قبل يك گراف ساده نمي باشد زيرا دو يال موازي و دو طوقه دارد.

باتوجه به تعريف گراف ساده كه هر دو رأس متمايز حداكثر با يك يال به هم متصل شده اند و هيچ رأسي به خودش متصل نشده است، مي توان گراف ساده را به صورت زير نيز تعريف كرد:

تعريف:

گراف ساده G جفت ای مرتب چون (V,E) است كه در آن V ست اي متناهي و غير خالی و E سب ست اي از تمام سب ست هاي دوعضوي V است.

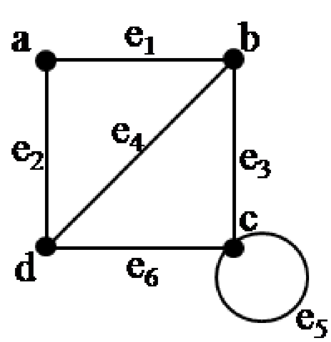
مي دانيم اگر ست اي داراي n عضوباشد آنگاه ست تمام سب ست های دوعضوي آن داراي $\binom{n}{2} = \frac{1}{2} n\,(n-1)$ عضو است و درنتيجه $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ گراف ساده متمايز وجود دارد كه داراي اين n رأس باشد.

توجه داريم كه اگر ست اي m عضو داشته باشد تعداد سب ست هاي آن 2^m است.

مثال 2 : اگر $V=\{1,2,3,4\}$، آنگاه E يعني تمام سب ست هاي دوعضوی V داراي $\frac{1}{2}(4)(4-1) = 6$ عضو است. بنابراين $2^6=64$ گراف متمايز ساده وجود دارد كه رئوس آنها $V=\{1,2,3,4\}$ است.

مثال 3 : ست رئوس و يال هاي گرافي را كه نمايش تصويری آن در زير رسم شده است مشخص كنيد. آيا اين گراف ساده است؟

تابع، يال- نقطه انتها رابنويسيد.



حل : رئوس: $V=\{a,b,c,d\}$

يالها: $E=\{ab,ad,bc,bd,cc\ ,cd\}$

واضح است كه گراف ساده نمي باشد زيرا يك طوقه دارد.

تابع، يال ـ نقطه انتها به صورت زير است.

نقاط انتهايي	يال
$\{a,b\}$	e_1
$\{a,d\}$	e_2
$\{b,c\}$	e_3
$\{b,d\}$	e_4
$\{c\}$	e_5
$\{c\ ,d\}$	e_6

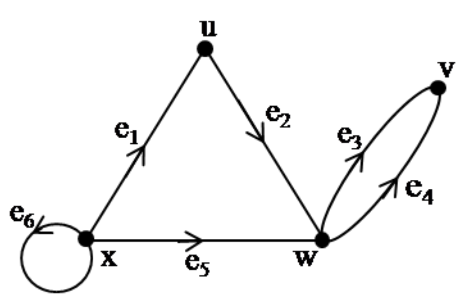
گراف جهت دار (Digraph)

تعريف گراف جهت دار اندك تفاوتي با تعريف گراف درحالت كلي دارد در گراف جهت دار به جاي ست رئوس جفت هاي مرتب از رئوس را به هر يال نظير مي كنيم يعني در گراف جهت دار هر يال ميتواند مانند يك پيكان از رأس اول به رأس دوم يا يك جفت مرتب از رئوس رسم شود.

تعريف: يك گراف جهت دار(ديگراف) شامل دوست متناهي است. يك ست $V(G)$ از رئوس ودوم ست $D(G)$ از يالهاي جهت دار. يعني هر يال دورأس را درجهت خاصي به هم متصل ميكند. به اين معني كه هر يال متناظر با يك جفت مرتب از رئوس است.

اگريال e متناظر با جفت (u,v) از رئوس باشد، آنگاه e يال (جهت دار) از u به v ناميده مي شود.

مثال 4 : گراف جهت داري كه در زير نشان داده شده است داراي چهار رأس $\{u,v,w,x\}$ و 6 يال $\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$ است.



یال e_1 رأس x را به رأس u متصل مي كند.
یال e_2 رأس u را به w و يالهاي e_3 و e_4 رأس w را به v متصل ميكنند. يال e_5 رأس x را به w و بالاخره يال e6 رأس x را به خودش متصل مي كند.

معمولاً براي مشخص كردن يالها درگراف جهت دار از ترتيب دورأس استفاده ميكنيم. مثلاً يال e_1 را با xu نشان مي دهيم كه با ux متفاوت است. يا يالهاي e_3 وe_4 راباwv نشان ميدهيم و يال e6 را با xx.
درواقع اين همان نمايش به وسيله جفت هاي مرتب است.

تعريف: درگراف جهت دار، دو يال يا بيشتررا موازي گوييم هرگاه دو رأس را در يك جهت به هم متصل كنند ويالي كه يك رأس را به خودش متصل كند طوقه مي ناميم.

درمثالي قبلي دويال e_3 وe_4 موازي اند ويال e_6 طوقه است.

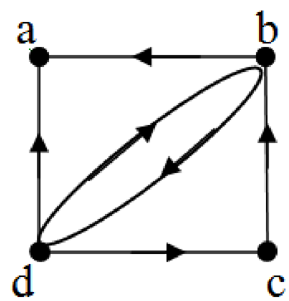
گراف جهت دارساده

تعريف: گراف جهت دار G را گراف جهت دار ساده مي ناميم هرگاه داراي يالهاي موازي وطوقه نباشد.

تعريف فوق معادل تعريف زير نيز مي باشد.

گراف جهت دار ساده G جفت مرتبي چون (V,D) است كه در آن V ست اي غير خالى و متناهي و D سب ست اي از ست تمام جفت مرتب هاي متمايز اعضايV است.

مثال 5 : درگراف جهت دار زير رئوس و يالها را بنويسيد آيا اين گراف جهت دار ساده است؟



حل: رئوس V={a,b,c,d,}
يالها ={(b,a),(b,d),(c,b), (d,a),(d,b),(d,c)}
يا
D={ba,bd,cb,da,db,dc}

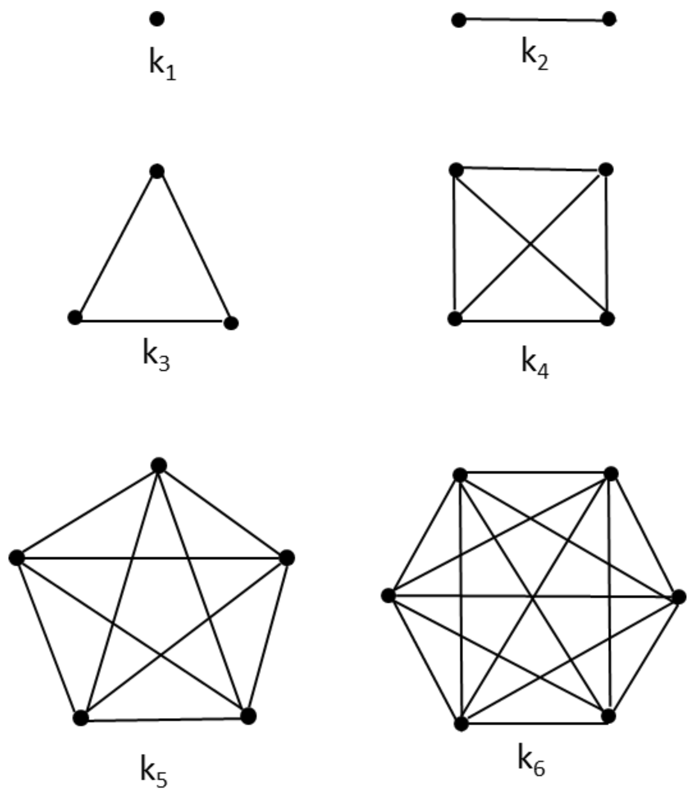
مشخص است كه اين گراف، يك گراف ساده جهت دار است، زيرا دو يال موازي يا طوقه ندارد.

گراف كامل (Complete Graph)

دسته مهمي از گراف ها وجود دارند كه درآنها يالها كامل هستند، يعني تمام رئوس به وسيله يالها به هم متصل شده اند اين نوع گراف ها را كامل مي نامند.

تعريف: يك گراف كامل با n رأس، كه با K_n نشان داده مي شود، يك گراف ساده است كه هر رأس آن به تمام رأس هاي ديگر متصل شده باشد.

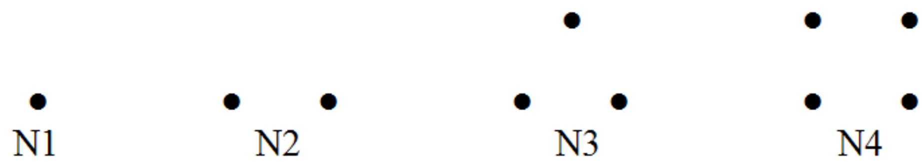
گراف هاي كامل با n رأس(از مرتبه n) كه $1 \leq n \leq 6$ درزير نشان داده شده اند.



مشاهده ميكنيم به جز k_1 درتمام گراف هاي ديگر تمام يالهای بين هر دورأس رسم شده اند.

گراف خالی یا پوچ (Null Graph)

تعريف: گراف تهي گرافي است كه هيچ يالي نداشته باشد. گراف تهي با n رأس رابه N_n نشان مي دهيم.

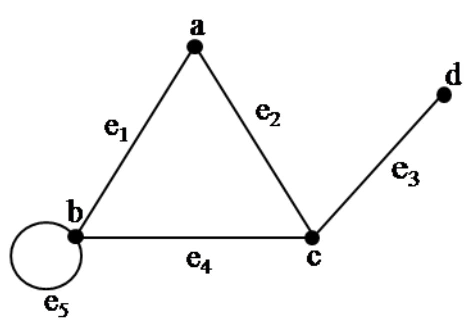


سب گراف (Subgraph)

درریاضي گاهي اشيائي كلي را بررسي ميكنيم كه اشياء ساده تري از همان نوع را شامل هستند، مانند سب ستها يا سب دنباله ها وغيره. درنظريه ی گراف ها نيز سب گراف به صورت زير تعريف مي شود.

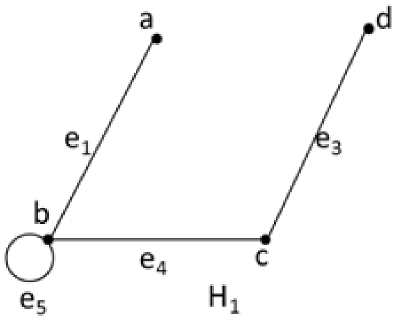
تعريف: يك گراف H سب گراف، گراف G است اگر و فقط اگر، هررأس H رأسي ازG نيز باشد، وهر يال H يالي از G نيز باشد، وهريال H همان دو نقطه انتهايي را در G داشته باشد.

گراف G به صورت زير نشان داده شده است.



$E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\},V=\{a,b,c,d\}$

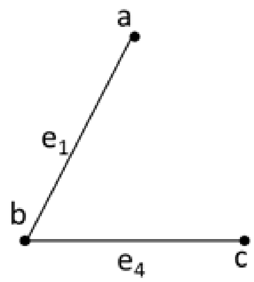
هر يك از گراف هاي زير يك سب گراف G است.



H_1

V_1 = {a, b c, d},

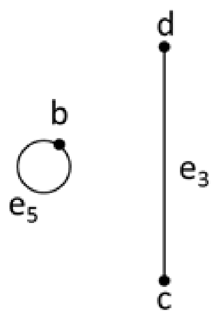
E_1 ={e_1,e_3,e_4,e_5}



H_2

V_2 = {a,b,c}

E_2 = {e_1, e_4}



H_3

V_3 = {b,c,d}

E_3 = {e_3, e_5}

يكريختي وتساوي(يكساني) (Isomorphism)

چنانچه در بررسي گراف ها مشاهده كرديم ساختمان گراف ها بر پايه رئوس و يالها مي باشد.

دوگراف را مساوي گوييم هرگاه رئوس ويالهای آنها يكي باشند. وقتي رئوس و يالها مشخص باشند ميتوانيم گراف را رسم كنيم و در اصل، هر نمايش تصويری ای كه از ديگری بهتر باشد را رسم مي كنيم، روش واقعي آن است كه رئوس و يالها نامربوط رسم نشوند حتي اگر بعضي نمايش های تصويری از ديگري ساده تر باشند.

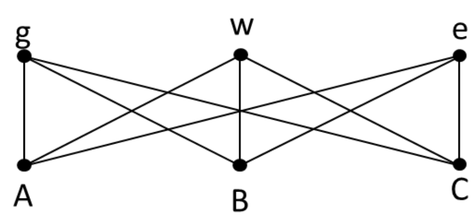
براي مثال فرض كنيم مي خواهيم سه خانه B,A و C رابه سه منبع گاز،(g) آب(w) وبرق (e) متصل كنيم.

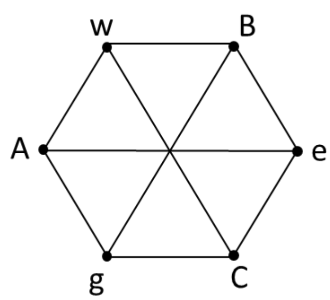
ست رئوس: $V=\{A,B,C,g,w,e\}$

ست يالها كه همان لوله ها يا كابل هاي اتصال هستند عبارت است از:

$E=\{Ag,Aw,Ae,Bg,Bw,Be,Cg,Cw,Ce\}$

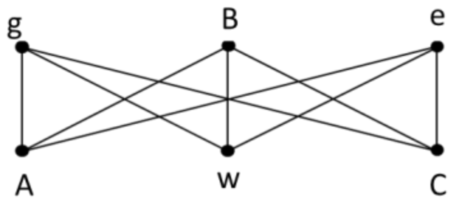
ميتوانيم نمايش هاي تصويری اين گراف را به دو صورت زير رسم كنيم:

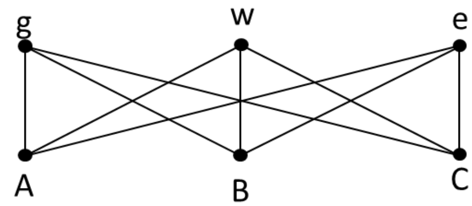




هر يك از اين دو نمودار داراي 6 رأس و9 يال مي باشند، وهردو اطلاعات يكساني رابيان مي كنند. هر خانه به يك منبع متصل است. اما هيچ دوخانه اي به هم وهيچ دومنبعي نيز به هم متصل نيستند. مشاهده مي كنيم كه اين دو نمايش تصويری ظاهراً غير مشابه نشان دهنده ی يك گراف هستند يعني هردو يك گراف رامشخص مي كنند.

ازطرف ديگر ممكن است دونمودار مشابه به نظر برسند، اما نشان دهنده ی دو گراف متمايز باشند به عنوان مثال، دو نمودار زير مشابه به نظر مي رسند.





شكل (2)   شكل (1)

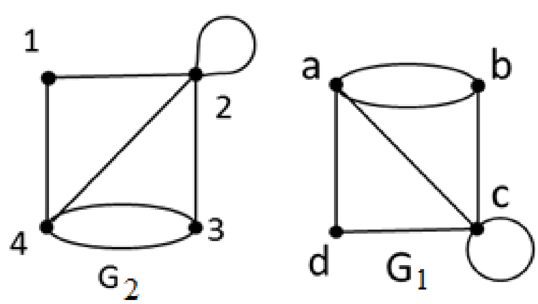
اما آنها يك گراف نيستند يا به عبارتي دو گراف مساوي نيستند.AB در شكل(2) يك يال است درصورتي كه درشكل(1) يال نمي باشد.

اين مشابه بودن دونمودار را يكريختي يا همريختی مي ناميم. به اين معني كه دوگراف اساساً داراي يك ساختار هستند. ميتوانيم با تغيير بر چسب رأسها از شكل(1) شكل(2) را بدست آورديم. در اين حالت كافي است بر چسب رأس هاي B وW را تعويض كنيم. اين بحث ما را به تعريف زير راهنمايي مي كند.

تعريف: دوگراف G_1 و G_2 يكريخت(هم شكل) هستند هرگاه G_2 بتواند با يك نام گذاري(برچسب گذاري) رئوس از G_1 بدست آيد.

يعني، يك تناظر يك به يك بين رئوس G_1 وG_2 وجود داشته باشد به طوري كه تعداد يالهايي كه دورأس G_1 را به هم متصل ميكنند برابر تعداد يالهايي باشد كه دو راس نظير اين دورا در G_2 به هم متصل مي كند.

گراف هاي G_1 وG_2 در نمايش های تصويری زير يكسان يا مساوي نيستند اما يك ريخت مي باشند.



ميتوانيم با بر چسب گذاري مجدد از گراف G_1 گراف G_2 رابدست آوريم ، تناظر يك به يك زير را به كار مي بريم:

$G_1 \leftrightarrow G$

$a \leftrightarrow 4$

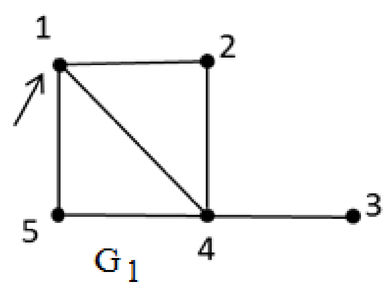
$3 \leftrightarrow b$

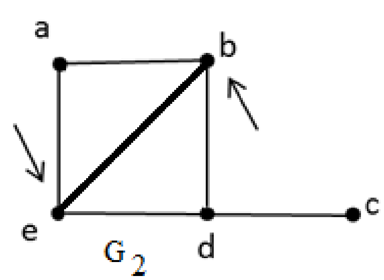
$C \leftrightarrow 2$

$d \leftrightarrow 1$

توجه داشته باشيم كه يالهاي G_1 متناظر يالهاي G_2 مي باشند مثلاً دو يالي كه a و b را در G_1 به هم متصل ميكنند متناظر با دويالي هستند كه 3 و 4 را در G_2 به هم متصل ميكنند. يال ac در G_1 متناظر يال 42 در G2 است. طوقه cc در G_1 متناظر طوقه ی 22 در G_2 است. براي بررسي آن كه دو گراف يكي هستند بايد بررسي كنيم همه رئوس متناظر هم بر چسب گذاري شده اند. براي بررسي آن كه دوگراف يكريخت هستند بايد تحقيق كنيم كه مي توانيم با دوباره برچسب گذاري رئوس يكي به ديگري برسيم. به اين ترتيب كه، ابتدا بررسي مي كنيم كه تعداد رئوس ويالهاي دوگراف يكي هستند سپس شباهت هاي ويژه دوگراف راجستجو مي كنيم، از جمله، طوقه ها ، يالهاي موازي و تعداد يالهاي گذرنده از يك رأس.

مثال 6 : دوگراف رسم شده در زير هر دو5 رأس و6 يال دارند، اما يكريخت نمي باشند، زيرا G_1 دورأس دارد كه دقيقاً از هر يك دو يال گذشته است، درصورتي كه G_2 فقط يك رأس دارد كه از آن دويال گذشته است.

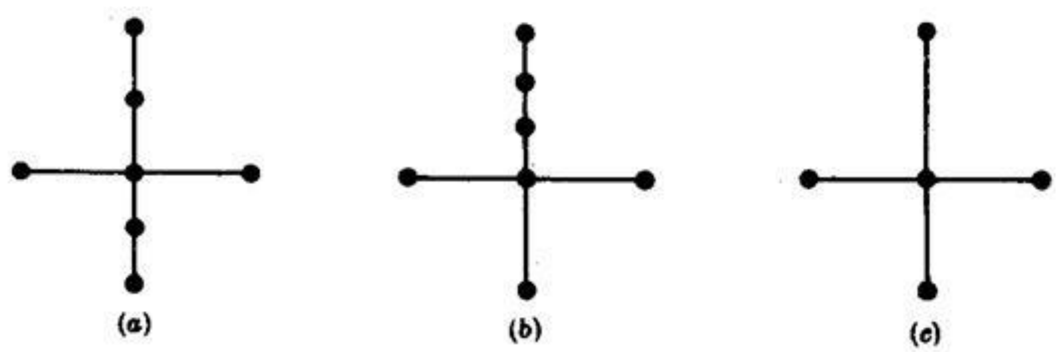




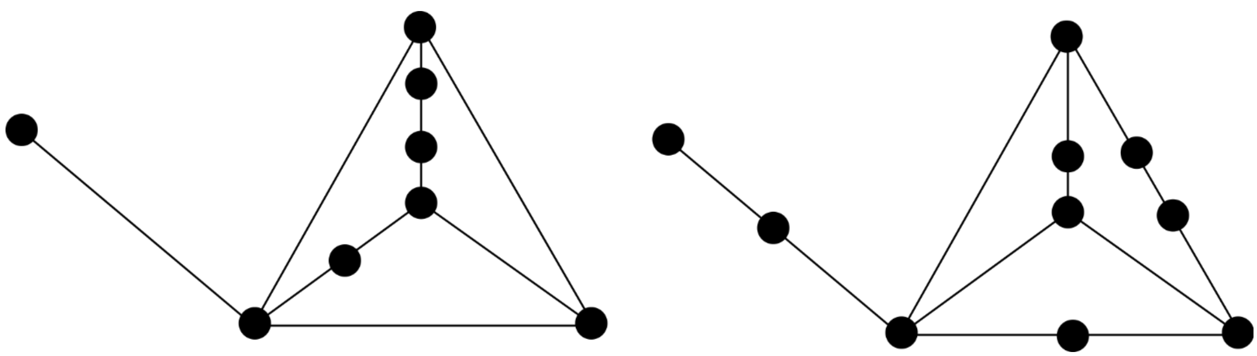
ياداشت : گراف G رابرچسب دار گوييم هرگاه تمام رئوس ان با حروف يا اعداد نام گذاري شده باشند.

گراف های همسانریخت (Homeomorphic Graphs)

فرض کنید گراف G داده شده است، با تجزیهٔ یک یال G به دو رأس اضافی می توان یک گراف جدید به دست آورد. دو گراف G و G^* را همسانریخت (همانریخت) گویند اگر بتوان آن ها را از گراف یکسان یا گراف های یک ریخت ، با این روش به دست آورد. گراف های (a) و (b) در شکل ذیل یکریخت نیستند، اما همسانریخت هستند زیرا هر یک آنها را می توان با اضافه کردن رأس های مناسب از (c) به دست آورد.



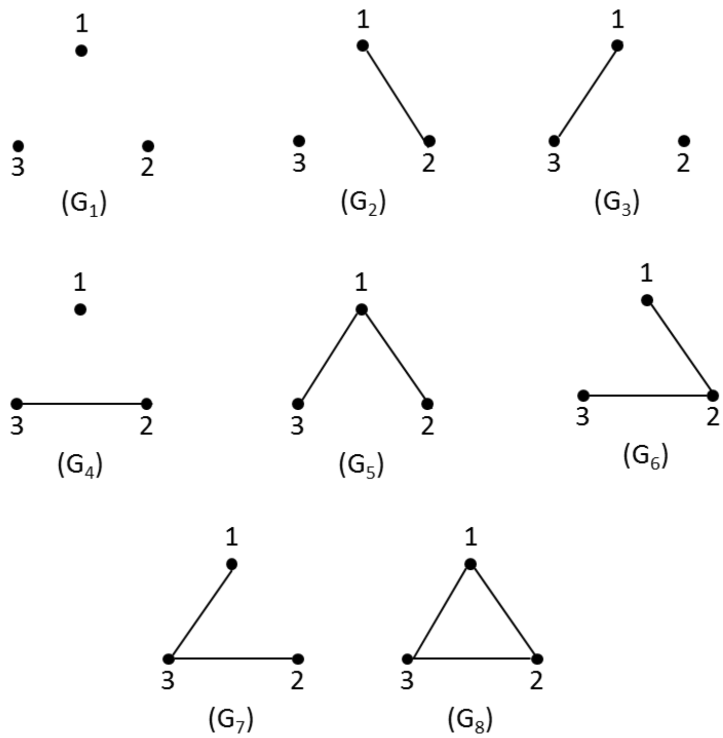
مثال دیگر



شمردن گراف ها

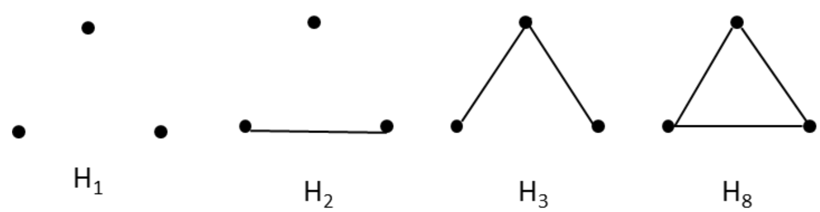
چه تعداد گراف برچسب دار وغیر بر چسب دار وجود دارند که تعداد رأس هاي آنها يکي هستند؟

وقتي تعداد گراف هاي برچسب دار را مي شماريم، به دنبال تفاوتي بين هر دوهستيم که دو گراف يکسان يا مساوي نباشند. مثلاً هشت گراف ساده و برچسب دار متمايز وجودارند که همگي داراي سه رأس هستند.



وقتي تعداد گراف هاي غير برچسب دار را مي شماريم، به دنبال تفاوتي بين هردو هستيم كه آن دويكريخت نباشد.

مثلاً دقيقاً چهار گراف ساده وغير برچسب دار يا غير يكريخت متمايز با سه رأس وجود دارند.



اگر به قسمت قبلی برگرديم تمام گراف هاي G_2, G_3 و G_4 يكريخت مي باشند يعني هرسه از نظر يكريختي همان H_2 هستنند و سه گراف G_5 و G_6 و G_7 نيز يكريخت و از نظر يكريختي همان H_3 هستند.

قبلاً فرمولي براي تعداد گراف هاي ساده بر چسب دار با n رأس بيان كرديم وقتي ست اي n عضو داشته باشد آنگاه ست تمام سب ست هاي دوعضوي آن داراي $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ عضو است.

يعني اگر تمام رئوس به هم متصل شده باشند همه يالها رسم شده و گراف ساده كامل است.

پس $\frac{n(n-1)}{2}$ يال داريم، اكنون درگرافي كه n رأس دارد ممكن است هيچ يا يك يا دو يا سه يا، . . . ، يا

$\frac{n(n-1)}{2}$ يال داشته باشيم، پس تعداد گراف هاي ساده متمايز تعداد سب ست هاي يك ست $\frac{n(n-1)}{2}$ عضوى است كه برابر $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ است. بنابراين قضيه ذيل را داريم:

قضيه: تعداد گراف هاي ساده برچسب دار با n رأس برابر است با :

$$2^{\binom{n}{2}} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

درحالت كلي محاسبه تعداد گراف هاي برچسب دار ساده تراز تعداد گراف هاي غير برچسب دار يا غير يكريخت است.

علاوه برآن انواعي از گراف ها وجود دارند كه مسأله فوق براي آنها حل وتعداد ديگري حتي وجود دارد كه مسأله فوق براي آنها باز(هنوز حل نشده) مي باشد.

درسال 1953 جرج پوليار رياضي دان مجارستاني يك فرمول كلي بدست آورد كه به كمك آن ميتوان تعداد گراف هاي غير يكريخت باهر تعداد رأس و يال را محاسبه كرد.

درجدول زير تعداد گراف هاي ساده وبرچسب دار وغير برچسب دار تا هشت رأس را نوشته ايم.

براي تعداد گراف هاي برچسب دار يا غير يكسان از قضيه قبل يعني $2^{\binom{n}{2}}$ استفاده كرده ايم.

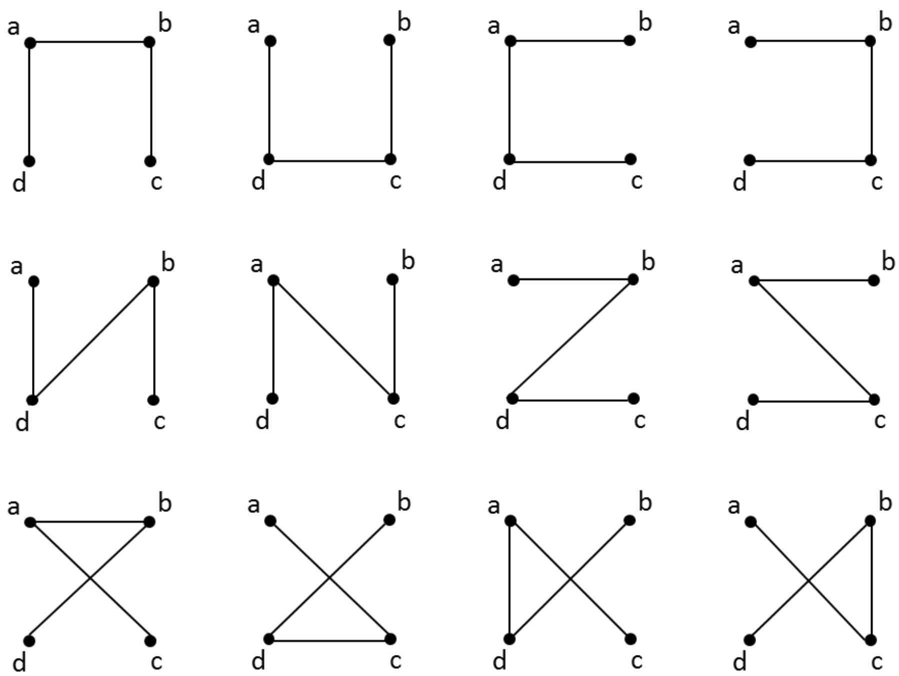
n	1	2	3	4	5	6	7	8
گراف هاي برچسب دار يا غير يكسان	1	2	2^3	2^6	2^{10}	2^{15}	2^{21}	2^{28}
گراف هاي غير برچسب دار يا غيريكريخت	1	2	4	11	34	156	1044	12346

يادداشت: شمارش گراف هاي غير برچسب دار يا غير يكريخت از برنامه ی درسی ما خارج است.

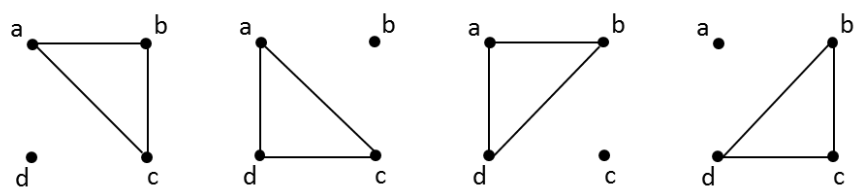
مثال 6 : چند گراف ساده برچسب دار(غير يكسان) وجود دارد كه داراي 4 رأس و 3 يال باشند. تمام آنها را رسم كرده و مشخص كنيد چه تعداد غير يكريخت هستند؟

حل : تعداد کل سب ست هاي دوعضوي ياهمان تعداد کل يالها اگر همه رئوس به هم وصل شوند $6=\binom{4}{2}$ است. اکنون بايد تعداد سب ست هاي سه عضوي يك ست 6 عضوي راپيدا کنيم که برابر$20=\binom{6}{3}$ است. لذا تعداد این گراف هاي برچسب دار با 4 رأس و 3 یال برابر 20 است. برای مشخص کردن تعداد گراف های غیر یکریخت با رسم این 20 گراف مشاهده میکنیم که فقط 3 گراف غیر برچسب دار یا غیر یکریخت وجود دارد.

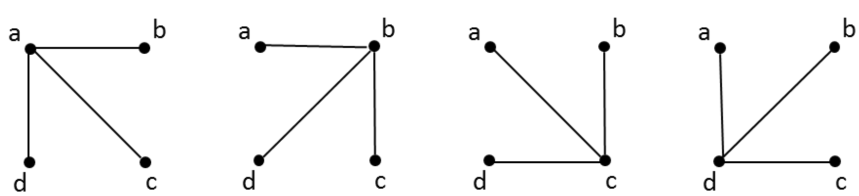
همه این 12 گراف یکریخت هستند.



همه این چهار گراف یکریخت هستند.



همه این چهار گراف یکریخت هستند.



تعريف: در هر گراف تعداد رئوس را مرتبه گراف ناميده و با P نشان مي دهند. همچنان تعداد يالها را در گراف اندازه ی گراف ناميده ومعمولاً با q نشان مي دهند.

مرتبه G را با p(G) واندازه آن با q(G) نيز نشان مي دهند. قبلاً بررسي كرديم كه اگر گرافي P رأس داشته باشد حداكثر يالهاي آن برابر $\binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}$ است .
بنابراين q تعداد يالها همواره در نا مساوی ذيل صدق
می كند:

$$0 \leq q \leq \binom{p}{2}=\frac{p(p-1)}{2}$$

اكنون با توجه به مثال قبل و بحث فوق ميتوانيم تعداد گراف هاي ساده بر چسب دار غير يكسان از مرتبه p واندازه q را محاسبه كنيم.

اگر تمام يالها رسم شده باشند$\binom{p}{2}$ يال داريم در واقع مساله به انتخاب سب ست هاي q عضوي از يك ست $\binom{p}{2}$ عضوي منجر مي شود كه برابر$\binom{\binom{p}{2}}{q}$ يا $\binom{\frac{p(p-1)}{2}}{q}$ است.

بنابراين تعداد گراف هاي ساده ی برچسب دار يا غير يكسان از مرتبه P واندازه q (p رأس وq يال) برابراست با $\binom{\binom{p}{2}}{q}$

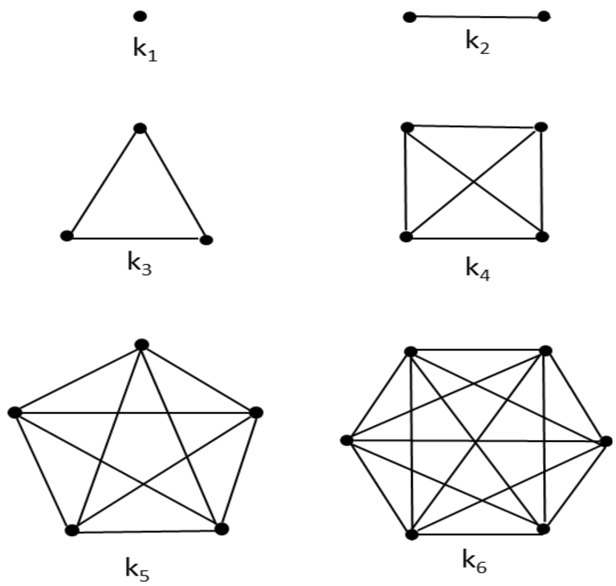
مثال 7: درگراف ساده غير خالی G يالها دو برابر تعداد رئوس است اين گراف حداقل چند رأس بايد داشته باشد؟

حل : فرض كنيم گراف ازمرتبه p باشد پس اندازه يالهاي آن q=2p است. اما درهر گراف بنابرتذكر قبلي $q \leq \frac{p(p-1)}{2}$ لذا $2p \leq \frac{p(p-1)}{2}$ يا $4p \leq p\ (p-1)$ چون $p>0$ پس $4 \leq p-1$ يا $p \geq 5$. لذا اين گراف بايد حد اقل 5 رأس داشته باشد. توجه داشته باشيم كه گراف كامل K_5 داراي اين ويژگي است. زيرا درگراف كامل k_5 ، تعداد يالها 10 ودوبرابر تعداد رئوس است. پس حداقل مقدار p برابر 5 است.

يادداشت: بااستفاده از نامساوي $q \leq \frac{p(p-1)}{2}$ داريم $P^2 - p - 2q \geq 0$ كه چون جذر مثبت معادله $P=\frac{1+\sqrt{1+8q}}{2}$ است، بنابراين از نامساوي فوق نتيجه مي گيريم كه همواره $p \geq \frac{1+\sqrt{1+8q}}{2}$ ولذا حداقل تعداد رئوس مشخص مي شود.

مثال 8 : گراف كامل K_6 داراي چند سب گراف كامل غير يكريخت(بدون برچسب) مي باشد.

حل : هرگراف کامل از K_1 تا K_6 يك سب گراف K_6 است. يعني گراف هاي كامل K_1 داراي يك رأس، K_2 دارای دو رأس، K_3 داراي 3 رأس، k_4، k_5 وk_6 به ترتيب دارای 4 ،5 و 6 رأس مي باشند.



به طور كلي هرگراف كامل Kp داراي p سب گراف كامل غير يكريخت مي باشد.

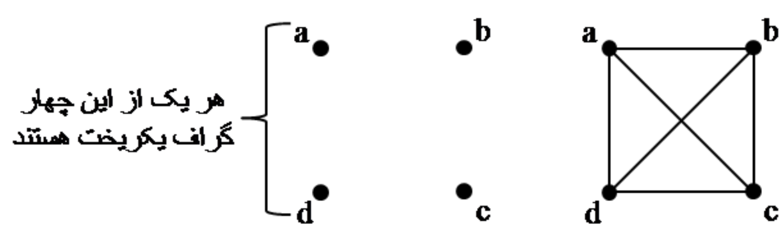
یا ميتوان گفت :

گراف كاملK_1, K_2, K_3, . . . ,K_P تمام سب گراف هاي كامل غير يكريخت گراف كامل Kp مي باشند.

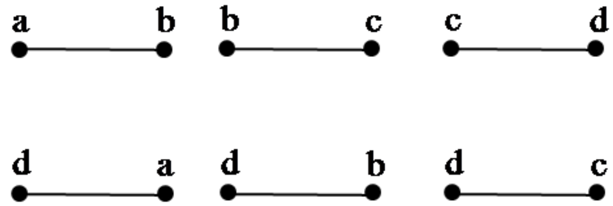
اما توجه داشته باشيد كه اگر گراف ها يكريخت نيز بتوانند باشند يا به عبارت ديگر برچسب دار باشند تعداد سب گراف هاي كامل بيشتر مي باشد. به عنوان نمونه اگر گراف كامل K_4 رادرنظربگيريم.

گراف هاي كامل يك رأس يا از نوع K_1، 4عدد مي باشد.

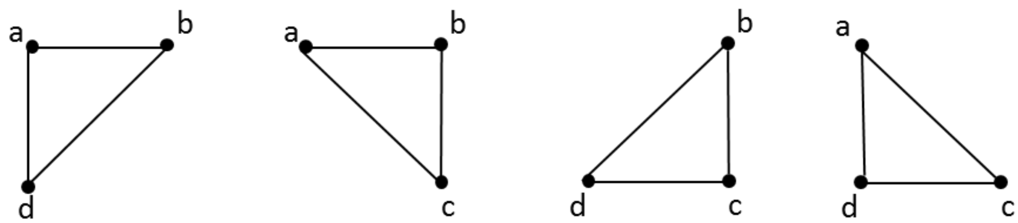
يعني انتخاب يك رأس از 4 رأس پس تعدادآنها $4 = \binom{4}{1}$ است.



تعيين سب گراف هاي كامل 2 رأسي يا از نوع k_2 انتخاب 2 رأس از 4 رأس است. پس تعداد آنها $6 = \binom{4}{2}$ است.



همه اين 6 گراف يكريخت مي باشند و همگي كامل اند يعني ازنوع k_2 هستند. تعيين سب گراف هاي كامل 3 رأسي يا از نوع K_3 انتخاب 3 رأس از 4 رأس است پس تعداد آنها $4 = \binom{4}{3}$ است.



همه اين 4 گراف يكريخت وكامل هستند يعني ازنوع K_3 مي باشند. وبلاخره سب گراف 4 رأسي همان خود k_4 است كه يكي است ميتوان تعداد آن را به$1 = \binom{4}{4}$ نيز محاسبه كرد.

مشاهده مي كنيم كه تمام سب گراف هاي كامل برچسب دارk_4 برابر است با:

$$\binom{4}{1}+\binom{4}{2}+\binom{4}{3}+\binom{4}{4}=2^4-1=15$$

$$4+6+4+1=15$$

با استدلال مشابه مثال فوق ميتوان نشان داد كه :

هرگراف كامل K_p داراي سب گراف هاي كامل برچسب دارK_1 به تعداد$\binom{p}{1}$، K_2 به تعداد $\binom{p}{2}$ و. . . K_p به تعداد$\binom{p}{p}$ است.

بنابرضرايب بسط دوجمله اي اتحاد زير را داريم :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

درنتیجه : $\binom{P}{1} + \binom{P}{2} + \ldots + \binom{P}{P} = 2^P-1$

بنابراین:

تعداد سب گراف هاي كامل برچسب دار گراف كامل وبرچسب دارK_p برابر 2^P-1 است.

درجه رأس ها (Vertex Degrees)

دربسياري ازكاربرد هاي نظريه ی گراف مااحتياج به تعداد يال هايي داريم كه از يك رأس گذشته اند. مثلاً تعداد راه هاي كه همه در يك نقطه به هم مي رسند، دريك چهار راه 4 خيابان دريك نقطه به هم مي رسند. يا تعداد سيم هايي كه همگي در يك ترمينال الكتريكي(مثلاً جعبه تقسيم) به هم مي رسند، يا تعداد اتصال هاي كيمياوی ازيك اتم كه به هم متصل اند.

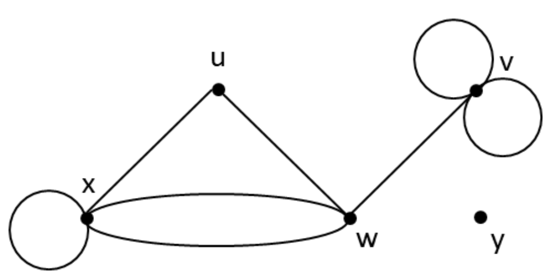
بنابراين در گراف ها كلمه درجه را به كارمي بريم.

تعريف درجه رأس:

در يك گراف G، درجه يك رأسv تعداد يالهايي از G است كه از رأسV گذشته اند. اين عدد را با deg (V) نمايش مي دهيم. اگر گراف طوقه داشته باشد هرطوقه دو بار به حساب مي آيد.

واضح است كه درجه يك رأس عددي صحيح ونامنفي است هرگاهdeg(v) يك عدد جفت(يا تاق) باشد به ترتيب آن را رأس جفت(يا تاق) می ناميم. درجه ی گراف G را مجموع درجه ی تمام رأس های G تعريف ميكنيم.

مثال 9 : درگراف زير درجه ی تمام رأ س ها را بنويسيد سپس مجموع درجه ی رأس ها را پيدا كنيد.



حل : باتوجه به نمایش تصویر فوق داریم:

$$\deg(u)=2 \ , \deg(v)=5 \ ,\deg(w)=4$$

$$\deg(x)=5 \quad ,\deg(y)=0$$

G مجموعه درجه هاي = deg(u) + deg(v) + deg(w) + deg(x) + deg(y)

$$=2+5+4+5+0=16$$

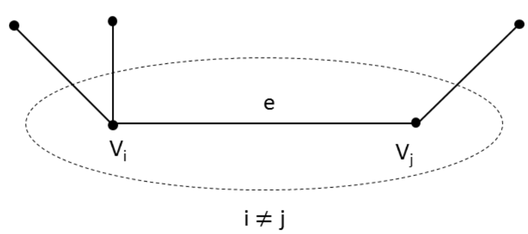
دراین گراف مشاهده مي كنيم كه 8 يال وجود دارد ومحاسبه نشان ميدهد كه مجموع تمام درجه هاي G برابر 16 يعني دو برابر اندازه G تعداد يالها است كه 8 مي باشد. چنانچه درقضيه زير خواهيم ديد اين مطلب كلي است. يعني درهرگراف مجموع درجه تمام رأس ها دوبرابر مجموع يالها است.

قضیه: اگر G هر گرافی باشد، آنگاه مجموع درجه ی رأس های G مساوی دو برابر مجموع یالهای G است.
یعنی ، اگر $V = \{v_1,v_2,...,v_n\}$ ست رأس های گراف G با اندازه q باشد آنگاه:

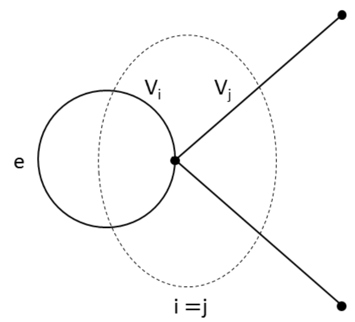
G مجموع درجه ی تمام رأس های =

$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \cdots + \deg(v_n) = 2q = 2($تعداد یالهای $G)$

اثبات: اثبات ساده است. اگر vi وvj دو رأس باشند كه مجاورند يالي كه اين دورا به هم متصل ميكند درمجموع درجه ها دو بار به حساب ميآيد. حتي اگر i=j يعني گراف در يك رأس طوقه داشته باشد آن نيز دوباره به حساب مي آيد پس مجموع تمام درجه ها دو برابر مجموع يالها است درحالتي كه گراف خالی باشد يعني هيچ يالي نداشته باشد نيز دوطرف رابطه فوق صفر ولذا برابر اند.



i ≠ j



از قضيه فوق بلافاصله نتيجه زير گرفته مي شود.

مجموع درجه تمام رأس هاي يك گراف عددي جفت است. اين شرطي لازم براي وجود يك گراف است.

مثال 10 : گراف با مشخصات زير را رسم كنيد.

1- گرافي با چهار رأس وبا درجه هاي 1،1، 2 و 3.

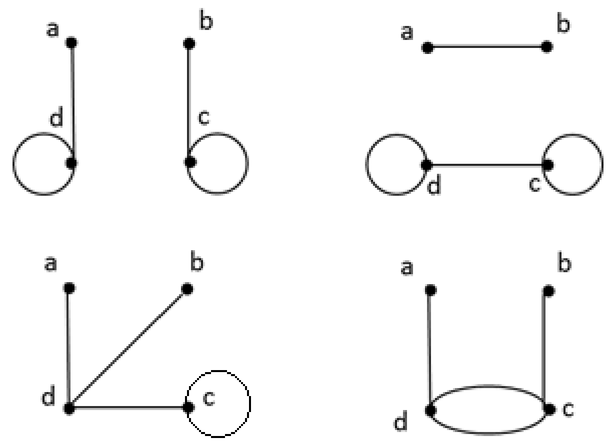
2- گرافي با چهار رأس وبا درجه هاي 1،1،3 و3.

3- گرافي ساده باچهار رأس وبا درجه هاي 1 ، 1، 3 و3.

حل:

1– چنين گرافي وجود ندارد. زيرا مجموع درجه رأس ها 7 =1+1+2+3 است كه عددي تاق است. مي دانيم مجموع درجه رأس هاي هرگراف عددي جفت است.

2- G ميتواند هريك از گراف هاي زير باشد.

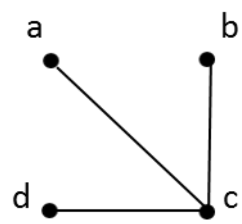


درهرحالت اهميتي ندارد كه چگونه يالها بر چسب گذاري شده باشند.

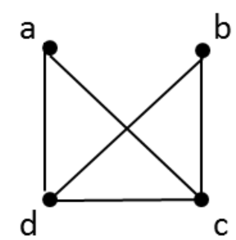
$$deg(a)=1,deg(b)=1,deg(c)=3, deg(d)=3$$

3- دراین حالت با وجودي که $1+1+3+3=8$ وشرط لازم برقرار است اما چنین گراف وجوندارد.

چون $deg(c)=3$ و گراف ساده است. یعني طوقه و یال هاي موازي ندارد لذا باید یالهایي وجود داشته باشند که c را به a وb و d متصل کنند مانند شکل زیر .



به همین دلیل چون درجه رأس d نیز3 است پس باید d نیز به وسیله سه یال به b,a وc متصل باشد مانند شکل زیر:



اما در این صورت $deg(a)\geq 2$ و $deg(b)\geq 2$ که این یك تناقص است ، زیرا a و b با درجه هاي یك میباشند. پس گراف ساده از مرتبه 4 با درجه هاي 1 ،1، 3 و 3 وجود ندارد.

مثال 11 : آیا دریك گروه 9 نفري امکان دارد که هر نفر دقیقاً با 3 نفر دیگر دوست باشد؟

حل : جواب منفي است. زیرا اگر9 نفر رأس هاي یك گراف درنظر گرفته ورابطه دوستي هرنفر را با نفر دیگر با یك یال نشان دهیم، دراین صورت باید درجه ی هر رأس برابر3 ولذا مجموع درجه هاي گراف 27 باشد که امکان ندارد زیرا مجموع درجه رأس ها درهرگراف همواره جفت است. اکنون قضیه دیگري را که یکي از نتایج قضیه قبل است بیان مي کنیم.

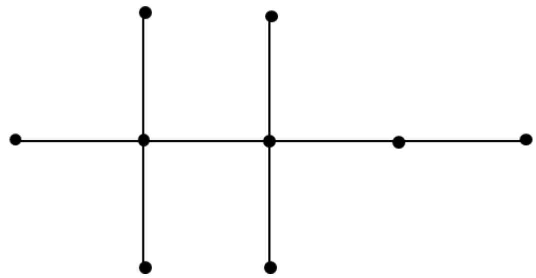
قضیه: درهرگراف تعداد رأس هاي با درجه تاق عددي جفت است.

اثبات: فرض کنیم E مجموع درجه تمام رأس باشد که ازدرجه جفت مي باشند وO مجموع درجه تمام رأس هایي که از درجه تاق مي باشند لذا مجموع درجه تمام رأس هاي گراف $E+O$ است که برابر $2q$ وعددي جفت است. یعني $E+O=2q$ یا $O=2q-E$ اما E نیزجفت است زیرا مجموع چند عدد جفت است و $2q$ نیز جفت است پس باید O یعني مجموع درجه ی رأس هاي تاق عددي جفت باشد.

اگرm رأس با درجه تاق داشته باشيم مجموع اين m عدد تاق عدد جفت شده است. پس خود m بايد جفت باشد يعني تعداد رأس هاي با درجه تاق، جفت است.

زيرا اگرمجموع m عددي جفت باشد تعداد اين اعداد يعني m نيز بايد جفت باشد.

مثال 12: گراف زير را درنظرمي گيريم، دراين گراف 6 رأس از درجه تاق است. اين 6 رأس از درجه يك مي باشند و دو رأس ازدرجه 4 و يك رأس از درجه 2 است.



دنباله ي درجه رأس ها يا دنباله گرافي

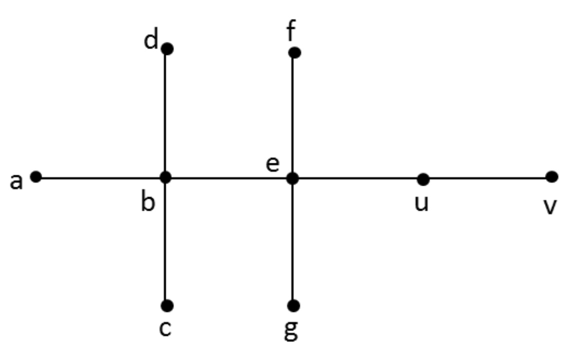
تعريف: هرگاه در يك گراف G درجه رأس ها را به ترتيب صعودي يا نزولي مرتب كرده باشيم آن را دنباله درجه رأس ها يا دنباله گرافي مي ناميم. درجه هاي مساوي به هر تعداد بايد تكرار شوند.

مثلاً اگر گراف G داراي p رأس باشد(ازمرتب pباشد) و $d_1, d_2, \ldots, d_p$ درجه رأس هاي گراف باشند به طوري كه به ازاي هر $1\le i\le p$ داشته باشيم $d_i \le d_{i+1}$ يا $d_i \ge d_{i+1}$ آنگاه:

$$d_1, d_2, \ldots, d_n$$

را دنباله درجه رأس هاي G مي ناميم. معمول آن است كه به ترتيب صعودي آنها را مرتب كنيم. البته درمواردي نيز مرتب كردن به طريق نزولي كار ساز مي باشد.

مثال 13 : درگراف رسم شده دنباله درجه رأس ها رابنويسيد.



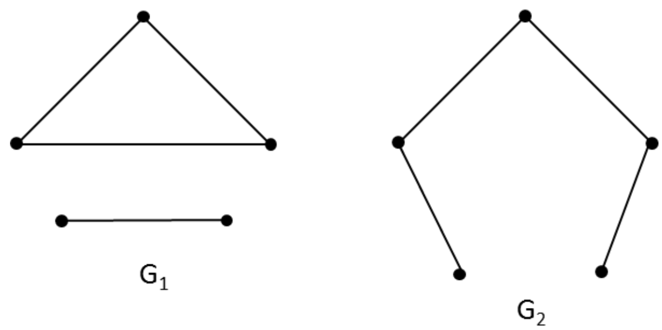
$$deg(a)=deg(c)=deg(d)=deg(f)=deg(g)=deg(v)=1$$

$$deg(u)=2,\ \ deg(e) = deg(b)=4$$

پس دنباله درجه رأس ها به طريق صعودي به صورت زير است:

$$(1,1,1,1,1,1,2,4,4)$$

ممکن است دنباله درجه رأس دو گراف يکی باشد اما اين دوگراف يکريخت نباشند.



درهر دو گراف G1 وG2، دنباله درجه رأس ها (2,2,2,1,1) است. که به طور نزولي مرتب شده اند مشخص است که اين دو گراف يکريخت نيستند. حتي تعداد رأس ها و يالها نيز يکی هستند.

مثال 14 : درکدام حالت زير يك گراف مشخص مي شود:

1ـ گرافي ازمرتبه 10 بادنباله گرافي (دنباله درجه رأ س ها) 1,1,2,2,2,3,4,4,4,6

2ـ گرافي از مرتبه 5 با دنباله درجه رأس ها 1,2,3,3,5

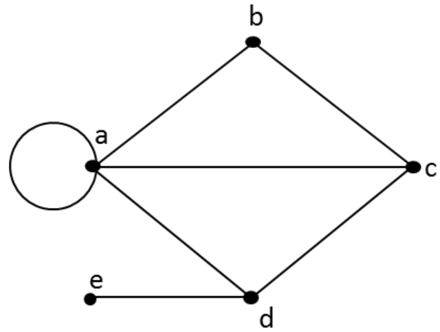
3ـ گرافي از مرتبه 4 با دنباله درجه رأس ها 1,2,3,3

4ـ گرافی ساده ازمرتبه 4 بادنباله درجه رأس ها 1,2,3,4

حل:

1ـ چنين گرافي وجودندارد زيرا مجموع درجه رأس ها 29 است که تاق است. دليل ديگري نيز وجود دارد تعداد رأس هاي داراي درجه تاق عددي تاق است که امکان ندارد.

2 ـ دراين گراف مجموع درجه رأس ها 14 است تعداد رأس هاي با درجه تاق جفت است، ممکن است چنين گرافي موجود باشد. با رسم تأييد مي شود:



3ـ چنین گرافي وجود ندارد مجموع درجه ها 9 است که تاق است.

4 ـ مجموع درجه ها 10 و تعداد رأس با درجه تاق جفت است. پس شرط لازم وجود دارد اما چنين گرافي نيز وجود ندارد.

زيرا رأسي ازدرجه 4 وجود دارد كه بايد به چهار رأس متمايز ديگرمتصل شود اما سه رأس بييشتر نداريم پس بايد دررأس بادرجه4 طوقه يا دويال موازي موجود باشد كه امكان ندارد زيرا گراف ساده است.

مثال 15 : ثابت کنید اگر G گرافی ساده با حد اقل دو رأس باشد آنگاه در این گراف لااقل دو رأس با درجه های برابر وجود دارند.

حل: فرض كنيم گراف G داراي n رأس باشد($n\geq2$) واضح است كه حداكثر درجه هر رأسn-1 است چرا؟

اگر هيچ دورأس بادرجه هاي برابر وجود نداشته باشند بايد دنباله درجه رأس ها به صورت ذيل باشد:
$(0,1,2,3,\ldots,n-1)$

اگراين گراف يك رأس از درجه صفر داشته باشد آنگاه نميتواند رأسي ازدرجه n-1 داشته باشد. زيرا وقتي درجه يك رأس صفر باشد، n-1 رأس ديگر باقي مي ماند كه حد اكثر درجه در آنها n-2 است، لذا n رأس داريم كه درجه هاي آنها در بين n-1 عدد 0 ,1 , 2 ,…, n-2 است. در نتيجه بايد يكي از اين اعداد لااقل درجه 2 رأس باشد(اصل لانه كبوتري) به همين ترتيب اگر گراف رأسي از درجه صفر نداشته باشد n رأس داريم كه درجه های آنها در بين n-1 عدد 1،2،…،n-1 است در نتيجه بايد يكي ازاين اعداد لااقل درجه دو رأس باشد.

بنابراين درهرحالت لااقل بايد درجه دو رأس مساوي باشد.

ماکسيمم درجه و مينيمم درجه

تعريف: بزرگترين عدد بين درجه رأس هاي گراف G را ماکسيمم درجه G مي ناميم وآن را با $\Delta(G)$ يا به طور خلاصه تر با Δ نشان مي دهيم.

کوچکترين عدد بين درجه رأس هاي گراف G رامينيمم درجه G ناميده و آن را با $\delta(G)$ يا به طور ساده تر δ نمايش مي دهيم.

اگر دنباله درجه هاي رأس هاي يك گراف را به طور صعودي مرتب کرده باشيم آنگاه داريم:

$$\delta(G) = d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \ldots \leq d_p = \Delta(G)$$

بلافاصله از اين نامساوي نتيجه مي گيريم که به ازاي هر i، که هر $1 \leq i \leq p$ داريم؛ $\delta \leq d_i \leq \Delta$

بنابراين: $p\delta \leq d_1+d_2+\ldots+dp \leq p\Delta$

اما $d_1+d_2+\ldots d_p = 2q$ که q اندازه گراف يا تعداد يالها مي باشد.

درنتيجه؛ $p\delta \leq 2q \leq p\Delta$ بنابراين:

يا $\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$

بنابراين، اگر در گراف G، p تعداد رأس ها و q تعداد يالها و δ و Δ به ترتيب مينيمم و ماکسيمم درجه رأس ها باشند آنگاه: $\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta$

$$\frac{1}{2}p\delta \leq q \leq \frac{1}{2}p\Delta$$

مثال 16 : دريك گراف ساد ه فرض کنيم $\delta = 2$ وتعداد يالها 14 باشد. دراين صورت Δ ماکسيمم درجه رأس ها همواره ازچه عددي کمتر است؟

چون $q=14$ پس، $\frac{1}{2}p\delta \leq 14$ يا $\frac{1}{2}p(2) \leq 14$ درنتيجه $P \leq 14$ لذا اين گراف حداکثر14 رأس دارد بنابراين Δ حد اکثر ميتواند برابر 13 باشد يعني همواره $\Delta \leq 13$

درهرگراف ساده با p رأس همواره $\Delta \leq p-1$.

يعني ماکسيمم درجه رأس ها حد اکثر p-1 است.چرا؟

مثال 17 : دریك گراف ساده $\Delta = 4$ اگر دراین گراف تعداد یالها برابر16 باشد آنگاه این گراف حداقل چند رأس دارد؟

$\Delta \leq \frac{2q}{\mathrm{p}}$ درنتیجه $\frac{32}{p} \leq 4$

بنابراین $\mathrm{p} \geq 8$. یعني حداقل تعداد رأس ها 8 است .

مثال 18 : در يك گراف ساده از مرتبه 6 واندازه7 دو رأس با درجه ماکسیمم و 4 رأس با درجه مینیمم است. ماکسیمم درجه ها یعني Δ و مینیمم درجه رأس ها یعني δ کدام اند؟

حل: چون این گراف 6 رأس دارد پس $2\Delta+4\delta=14$ یعني دو رأس با درجه ماکسیمم و 4 رأس با درجه مینیمم است.

از این رابطه داریم $\Delta+\delta 2=7$ یا $\delta 2=7-\Delta$ واضح است که بزرگترین مقدار Δ مي تواند 5 باشد زیرا گراف 6 رأس دارد. اگر$\Delta=5$ آنگاه $\delta=1$ اما این امکان ندارد. زیرا وقتي دو رأس از درجه 5 باشند باید ازهريك ازاين دورأس به تمام يالهاي ديگر يالي وجود داشته باشد يعني درجه 4 رأس باقي مانده حداقل باید2 باشد که امکان ندارد.

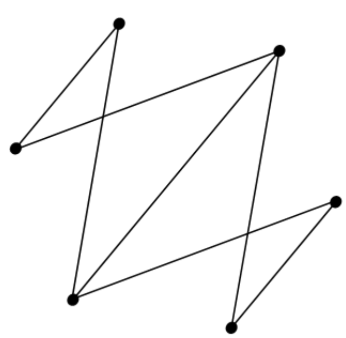
مي دانیم Δ و δ اعداد صحیح نامنفي اند.

اگر $\Delta=4$ آنگاه $\delta 2=3$ که قابل قبول نمي باشد.

اگر$\Delta=3$ آنگاه $\delta 2=4$ یا $\delta=2$ و قابل قبول است.

واضح است که از رابطه $\mathrm{p}\delta\frac{1}{2} \leq \mathrm{q} \leq \frac{1}{2}\mathrm{p}\Delta$ دراین مثال داریم $3\delta \leq 7 \leq 3\Delta$ پس باید$\Delta \geq 3$ پس فقط جواب فوق وجود دارد. البته مي توانستیم Δ کمتر یا مساوي 2 را نیز امتحان کنیم.

گراف با ویژه گي فوق درزیر رسم شده است.



$\Delta=3, \delta=2$

مثال 19 : گراف ساده G از مرتبه 10 است داراي 4 رأس از درجه ماكسيمم، 3 رأس از درجه مينيمم و 3 رأس ديگر با درجه هاي مساوي اند. اگر تعداد يالهاي اين گراف 9 باشد اين گراف رامشخص كنيد.

حل : اگر درجه 3 رأس با درجه هاي مساوي را α فرض كنيم آنگاه $4\Delta+\delta 3+\alpha 3=18$.

چون $4\Delta=3(6-\alpha-\delta)$ پس بايد Δ نيز مضرب 3 باشد، يعني $\Delta=3K$ درنتيجه $4k+\delta+\alpha=6$.

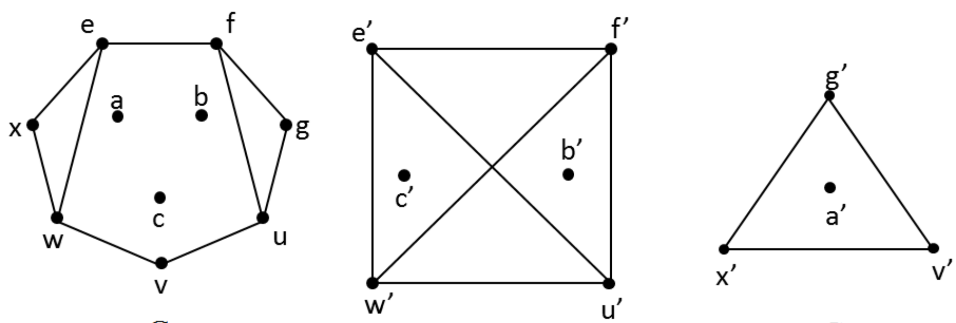
با استفاده از رابطه $p\delta\frac{1}{2}\le q\le\frac{1}{2}p\Delta$ داريم، $5\delta\le 9\le 5\Delta$ لذا بايد $\Delta\ge 2$ و $\delta\le 1$. اما Δ مضرب 3 و Δ همواره كوچكتر از 5 است زيرا در غير اين صورت جمع يالها از 18 بيشتر مي شود. درنتيجه Δ فقط مي تواند برابر 3 باشد.

بنابراين $\delta 3+\alpha 3+12=18$ يا $\delta 3+\alpha 3=6$ يا $\delta+\alpha=2$.

چون $\delta\le 1$ پس $\delta=1$ يا $\delta=0$ اما $\delta\neq 1$ زيرا درغير اين صورت $\alpha=1$ ولذا 6 رأس از درجه مينيمم مي شود پس
$\delta=0$ و $\alpha=2$.

لذا دنباله درجه ي رأس هاي اين گراف به صورت زير است.

$$(3,3,3,3,2,2,2,0,0,0)$$



G_1 G_2 G_3

دو گراف با ويژه گي هاي فوق درشكل ها رسم شده است. آيا اين دوگراف يكريخت هستندچرا؟

تشخيص گرافي بودن يك دنباله ازدنباله هاي درجه رأس ها
الگوريتم هاول- حكيمي

روش براي تشخيص گرافي بودن يك دنباله وجود دارد كه به روش هاول وحكيمي معروف است.

فرض كنيم دنباله درجه رأس هاي يك گراف ساده رابه طور نزولي به صورت زير مرتب كرده باشيم : $(m,a_1,a_2,\ldots,a_m,a_{m+1},\ldots,a_p)(1)$ اگراولين عدد دنباله يعني m را كنار گذاشته و ازهريك از m عدد بعدي، يك واحد كم كنيم، دنباله زير بدست مي آيد:

$(2)(a_1-1,a_2-1,...,a_m-1,a_m+1,...,a_p)$

اکنون دنباله (1) يك دنباله گرافي است اگر وفقط اگر دنباله (2) يك دنباله گرافي باشد.

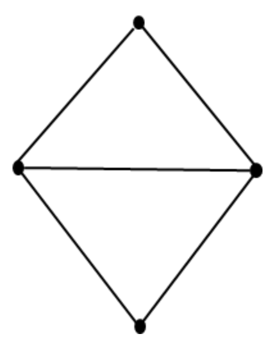
مثال 20 : آيا دنباله(3،3،2،2) يك دنباله گرافي است؟

حل : عدد 3 اولين عدد دنباله فوق را كنار گذاشته از هريك از 3 عدد بعدي يك واحد كم مي كنيم.

دنباله (2،1،1) به دست می آید دوباره از این دنباله عدد 2 را كنار گذاشته ازدوتاي ديگر يك واحد كم ميكنيم. به دنباله (0،0) مي رسيم كه دنباله گراف تهي است.

پس دنباله (3،3،2،2) نيز دنباله درجه رأس هاي يك گراف است يعني دنباله گرافي است.

گراف رسم شده با دنباله درجات فوق مي باشد.



مثال 21 : كدام دنباله درجه رأس هاي يك گراف ساده است. يعني دنباله گرافي است.

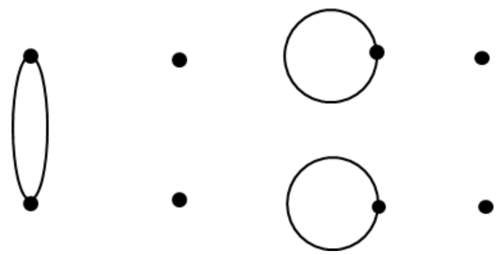
(5,4,4,4,2,1) و (3,3,2,2,1,1)

حل : در دنباله (3,3,2,2,1,1) عدد 3 اولين عدد دنباله را كنار مي گذاريم و از 3 عدد بعدي يك واحد كم مي كنيم دنباله (2,1,1,1,1) بدست مي آيد.

اكنون از اين دنباله عدد 2 را كنار گذاشته و از دو عدد بعدي يك واحد كم مي كنيم دنباله (0,0,1,1) بدست
مي آيد كه مي تواند دنباله درجه رأس هاي گراف زير باشد.

لذا دنباله (2,1,1,1,1) و در نتيجه دنباله (3,3,2,2,1,1) يك دنباله گرافي است. اما خواهيم ديد كه دنباله (5,4,4,4,2,1) يك دنباله گرافي نمي باشد. عدد 5 را كنار گذاشته از 5 عدد بعدي يك واحد كم مي كنيم به دنباله (3,3,3,1,0) مي رسيم. در اين دنباله نيز 3 را كنار گذاشته از 3 عدد بعدي يك واحد كم مي كنيم به دنباله (2,2,0,0) مي رسيم. اما اين دنباله گرافي نمي باشد. زيرا هيچ گراف ساده اي با اين دنباله درجات وجود ندارد.

در اين دنباله n= 4 و دو رأس از درجه صفر است. بايد در دو رأس ديگر طوقه وجود داشته باشد يا يال موازي داشته باشيم.



پس هيچ گراف ساده اي وجود ندارد.

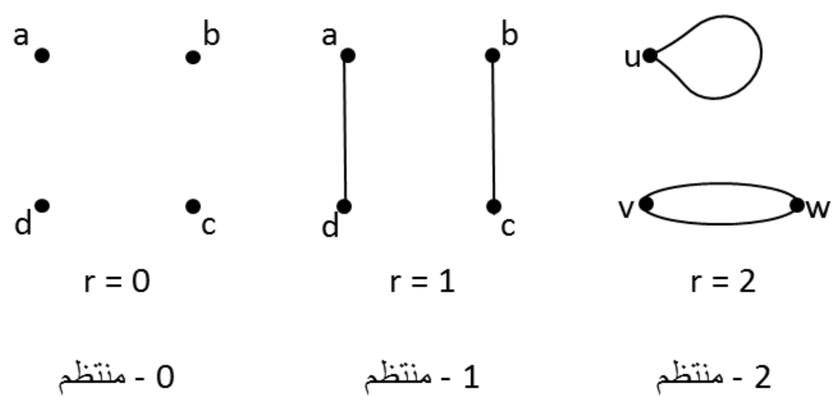
گراف منتظم (regular graph)

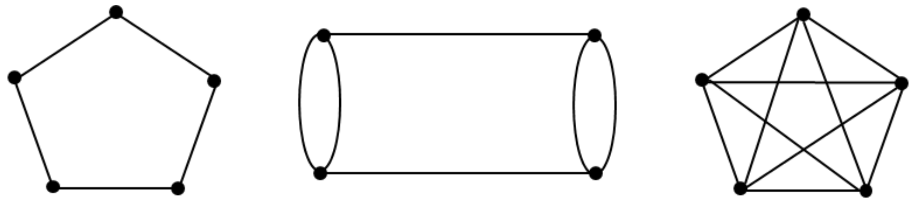
تعريف: يك گراف منتظم است هرگاه تمام رأس هاي ان داراي درجه هاي يكسان باشند.

يك گراف r- منتظم يا منتظم از درجه r است، هرگاه درجه هر رأس آن r باشد.

واضح است كه اگر G يك گراف كامل ازمرتبه p باشد آنگاه اين گراف(P-1)- منتظم ازدرجه p-1 است. اما توجه داشته باشيد كه عكس آن همواره صحيح نمي باشد.

گراف هاي زير منتظم مي باشند.



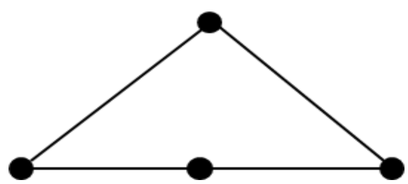


r = 2   r = 3   r = 4

2 - منتظم   3 - منتظم   4 - منتظم

و گراف کامل مرتبه 5 است.

با توجه به تعريف n ضلعي($n \geq 3$) در هندسه هر n ضلعي يك گراف 2ـ منتظم است. توجه داشته باشيد عكس آن همواره صحيح نمي باشد.



در مورد گراف منتظم قضيه زير اهميت دارد.

قضيه: اگر G يك گراف از مرتبه n و r- منتظم باشد، انگاه G داراي $\frac{nr}{2}$ يال است.$q = \frac{nr}{2}$ ويا $nr=2q$

اثبات: چون گراف n رأس دارد كه هر رأس از درجه r است، پس مجموع درجه رأس هاي اين گراف nr است. اما تعداد يالها نصف مجموع درجه رأس ها است پس تعداد يالها يا اندازه گراف $\frac{nr}{2}$ است.

با توجه به قضيه فوق واضح است كه اگر n و r هر دو فرد باشند آنگاه $\frac{nr}{2}$ صحيح نمي باشد و لذا چنين گرافي وجود ندارد. يعني نتيجه زير را داريم:

اگر n و r هر دو فرد باشند، آنگاه گرافي rـ منتظم و از مرتبه n وجود ندارد.

بنابر اين در هر گراف r- منتظم اگر n تعداد رأس ها فرد باشد بايد r زوج باشد يعني r يكی از اعداد $\{0,2,4,\ldots,n-1\}$ است.

اما اگر n زوج باشد r مي تواند فرد يا زوج باشد.

مثال 22 : چه تعداد از گراف هاي زير موجود وچه تعداد موجود نيستند؟

1ـ گرافي 3- منتظم با 8 يال

2- گرافي 2- منتظم با 7 رأس

3 - گرافي 3- منتظم با 5 رأس

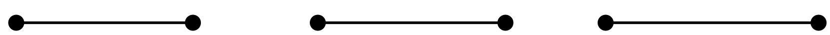
4 - گرافي1 - منتظم با 6 رأس

حل : 1- با توجه به رابطه $nr = 2q$ چون $q = 8$ و $r = 3$ در نتيجه $3n = 16$ كه n عددي تام بدست نمي آيد پس چنين گرافي وجود ندارد.

2- وجود دارد مي تواند 7 ضلعي باشد. $q = 7 = \frac{7\times2}{2}$

3 - وجود ندارد n و r هردو فرد هستند.

4 – وجود دارد. تعداد يالها 3 است. $\frac{6x1}{2} = 3$



مثال 23 : يك گراف r- منتظم داراي 16 يال است حد اكثر مقدار r كدام است؟

حل: $pr = 2q = 32$ در نتيجه:

$Pr = 1\times32 = 2\times16 = 4\times 8$

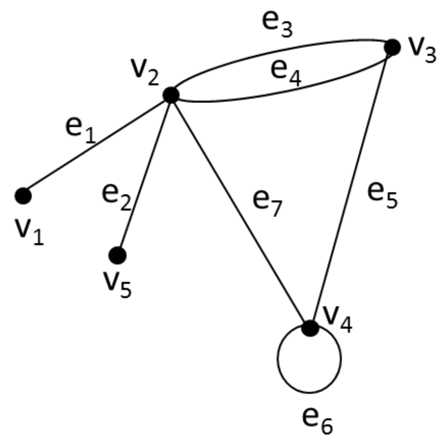
از طرفي در هرگراف $p \geq \frac{1+\sqrt{1+8q}}{2}$ يا $p(p-1) \geq 2q$ پس $P(P-1) \geq 32$ در نتيجه $p \geq 7$.

با توجه به رابطه فوق حد اقل p برابر 8 است پس حد اكثر r برابر 4 است.

مسير و دور (paths and circuits)

درگرافي كه نمودار آن رسم شده است، مي توانيم از رأس v_1 به رأس v_4 برويم به اين صورت كه با گذشتن از يال e_1 به v_2 و سپس با گذشتن از يال e_7 به v_4 مي رسيم.

این را نماد $v_1e_1v_2e_7v_4$ می دهیم..



يا مي توانيم از رأس ها و يالها به صورت زير عبور كنيم:

$v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_2\ e_3\ v_3\ e_5\ v_4e_6\ v_4\ e_7\ v_2\ e_3\ v_3\ e_5\ v_4$

اگر گراف ساده باشد مي توانيم يالها را ننويسيم.

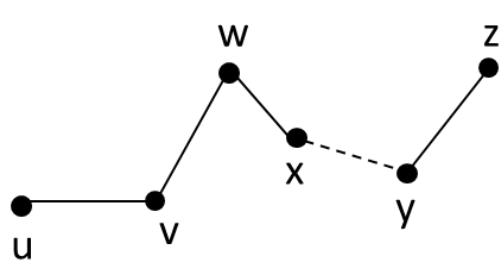
چندين نوع از دنباله هاي با رأس ها و يالهاي مجاور در گراف ها وجود دارند:

نوعي كه در آنها يال تكراري موجود نباشد، نوعي كه در آن رأس تكراري موجود نباشد، ونوعي كه نقطه شروع و انتها يكي باشد با توجه به ويژگي هاي فوق تعريف هاي زير را داريم:

تعريف: يك گشت به طول k در يك گراف، k يال متوالي به فرم زير است:

uv, vw ,wx,...,yz

اين گشت رابه صورت uvwx…yz نشان داده، و گشت بين u وz مي ناميم.

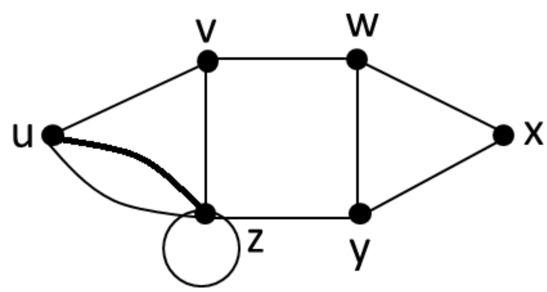


ميتوانيم تصور كنيم كه اين گشت از u به v، سپس از v به w سپس از w به x و به همين ترتيب ادامه مي يابد تا بلاخره به رأس z منتهي مي شود.

اگر گراف جهت دار نباشد ميتوان تصور كرد كه اين گشت از z به y و در ادامه نهايتاً به v ,w,x و بالاخره به u منتهي مي شود. بنابراين مي توانيم اين گشت را با u v w x ... zy نشان داده و گشت بين z و u بناميم.

توجه داشته باشيم كه از اين تعريف نمي توان نتيجه گرفت كه تمام يالها يا تمام رأس ها در يك گشت متمايزند.

به عنوان مثال، در گراف زير uvwxywvzzy يك گشت به طول 9 بين دو رأس u و y است، كه در آن يال vw دوبار وهمچنين راس هاي v, w, z,y دو بار تكرار شده اند.



در مواردي بهتر آن است كه بتوانيم شرايط محدود كننده اي براي يك گشت قائل شويم مثلاً در كل، يال ها يا رأس هاي تكراري نداشته باشيم يا به عبارتي رأس ها همگي و يالها نيز همگي متمايز باشند. بنابر اين تعريف زير را داريم:

تعريف مسير: يك مسير يك گشت است كه همه يالها و همه رأس ها درآن متمايز باشند.

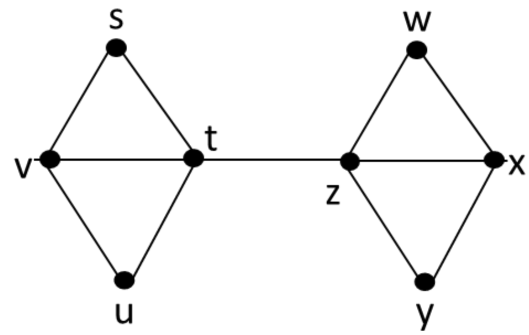
درشكل قبلي گشت vzzywxy يك مسير نمي باشد زيرا رأس هاي z و y دوبار تكرارشده اند.

اما درگشت vwxyz راسي تكرار نشده است، وبنابر اين يك مسير است. اين مسير به طول 4 مي باشد مي توانيم مسير را به صورت زير نيز تعريف كنيم كه معادل همان تعريف قبلي است.

تعريف: اگر u و v دو رأس متمايز درگراف G باشند، يك مسير از u به v درگراف G دنباله اي شامل(m+1) رأس دو به دو متمايز G است كه از u آغاز و به v ختم مي شود. وهر دو رأس متوالي اين دنباله در G مجاور مي باشند، عدد طبيعي m را طول مسير از u به v مي ناميم كه همان تعداد يالها درمسير است. طول مسير همواره ازتعداد رأس ها يكي كمتر است.

يادداشت: يك مسير از رأس v به خود رأس v را يك مسير با طول صفر تلقي مي كنيم.

مثال 28 : در گراف شكل زير تمام مسير هاي بين s و y را بنويسيد.



حل : مسیر stzy به طول3؛

مسیر هاي stzxy و svtzy به طول 4؛

مسیر هاي stzwxy و svtzxy وsvutzy به طول5 ؛

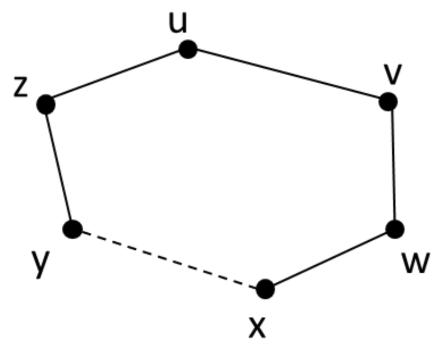
مسیر هاي svutzxy وsvtzwxy به طول 6؛

مسیر svutzwxy به طول 7؛

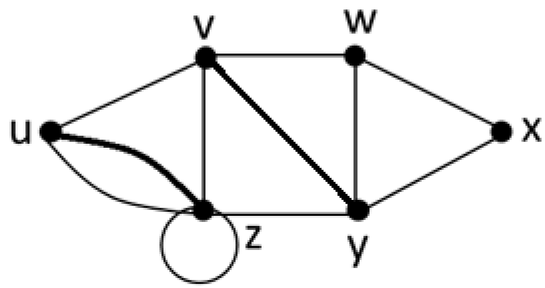
همچنین نوع خاصي از گشت ها یا مسیر ها را داریم که نقطه شروع و نقطه انتهاي آنها يك رأس است. در واقع گوییم بسته اند، لذا تعریف زیر راداریم:

تعریف: يك گشت بسته درگراف یالهاي متوالي به فرم uv ,vw ,wx ,…,yz ,zu است که نقطه شروع و پایان يك رأس باشد.

يك دور يك گشت بسته است که همه یال ها در آن متمایز و همه رأس هاي مياني نیز متمایز هستند.



گراف شکل زیر را در نظر مي گیریم:



گشت بسته vywxyzv يك دور نمي باشد، درصورتي كه گشت هاي vwxyv و vwxyzv همگي دور مي باشند.

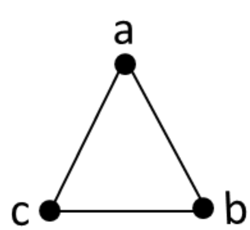
در گراف ساده دور را چنان درنظر مي گيريم كه حد اقل شامل سه يال باشد، اين تعريف به صورت زير است.

تعريف دور در گراف ساده يا دور ساده:

يك دور از گراف G دنباله اي به صورت $v_1, v_2, \ldots, v_m, v_{m+1} = v_1$ با شرط $m \geq 3$ شامل m+1 رأس G است كه در آن v_i ها دو به دو متمايز و هر دو رأس متوالي دنباله در G مجاورند. $1 \leq i \leq m$.

عدد طبيعي m را طول دور مي ناميم.

هر دور به طول 3 مانند abca در شكلي كه رسم شده است يك مثلث ناميده مي شود.



با توجه به تعريف فوق گراف تهي داراي هيچ دوري نمي باشد زيرا يالي ندارد حتي گراف هاي كامل k_1 و k_2 دوري ندارند اما گراف كامل K_p كه $p \geq 3$ دور دارد.

محاسبه تعداد مسير هاي متمايز بين دو رأس در گراف كامل K_p

مي دانيم در يك گراف كامل تمام يالها رسم مي شوند فرض كنيم G گراف كامل از مرتبه p باشد$p \geq 2$، رأس ها را $v_1, v_2, \ldots, v_p$ مي ناميم. اگر u و v دو رأس متمايز و دلخواه اين گراف باشد. يك مسير به طول 1 كه همان vu است بين u و v وجود دارد.

حال اگر بخواهيم مسير هاي متمايز به طول2 را كه بين u و v هستند پيدا كنيم به جز دو رأس u و v تعداد P -2 رأس باقي مي ماند كه هر يك ميتوانند بين u و v واقع شوند يعني p-2 مسير به صورت $uv_i v$ داريم كه v_i يكي از p-2 رأس باقي مانده است.

به همين ترتيب اگر بخواهيم مسيرهاي به طول3 را پيدا كنيم بايد بين u و v، دو رأس از p-2 رأس باقي مانده قرار گيرد، مانند uv_iv_jv. پس قرار دادن p-2 شي متمايز را در2 خانه داريم. براي اولي p-2 حالت وجود دارد و وقتي اولي انتخاب شد براي دومي p-3 حالت وجود دارد لذا در كل(p-2)(p-3) حالت وجود دارد در نتيجه تعداد مسيرهاي متمايز با طول3 بين u و v برابر(p-2)(p-3) است.

به طور كلي اگر بخواهيم تعداد مسير هاي متمايز به طول m را بين u و v پيدا كنيم گوييم بايد m-1 رأس از
P-2 رأس باقي مانده بين u و v واقع شوند. يعني قراردادن p-2 شي متمايز را درm-1 خانه داريم .
اولي به (p-2) دومی به (p-3) و ... بالاخره(m-1) امي به(p-m) طريق امكان پذير است.

لذا دركل به (p-2)(P-3)...(P-m) طريق امكان پذير است. كه همان تبديل(m-1) از(p-2) است.

$$(p-2)(p-3)\ldots(p-m)=\frac{(p-2)!}{(p-m-1)!}$$

$$= p\,(p-2,\, m-1)$$

$$=\binom{p-2}{m-1}(m-1)!$$

لذا قضيه زير را داريم:

قضيه: در هر گراف كامل K_p تعداد مسير هاي به طول m بين دو رأس متمايز برابر است با:

$$(p-2)(p-3)\ldots(p-m)= p(p-2,m-1)$$

$$=\binom{p-2}{m-1}(m-1)!$$

بهتر است همواره از اولين رابطه يعني حاصل ضرب پرانتزها استفاده كنيد.

مثال 29 : گراف كامل K_8 مفروض است.

1ـ چند مسير به طول2 بين دو رأس متمايز آن وجود دارد.

2ـ چند مسير به طول 2 كلاً در اين گراف وجود دارد.

3ـ چند مسير به طول 4 بين دو رأس متمايز وجود دارد.

4 ـ چند مسير به طول 4 كلاً دراين گراف وجود دارد.

حل :1ـ تعداد ميسر هاي به طول 2 بين دو رأس متمايز برابر 6=(8-2) است. (m=2)

2ـ براي محاسبه كل مسير هاي به طول 2 گوييم بين هر دو رأس متمايز 6 ميسر به طول 2 وجود دارد. چون 8 رأس داريم پس هر رأس را مي توان با 7 رأس ديگر در نظر گرفته مسير بين آن و هر يك را پيدا كنيم كه تعداد آنها7×6 است. اما چون 8 رأس داريم اين كار به 8 بار انجام مي گيرد، لذا تعداد مسير ها $8 \times 7 \times 6$ مي شود. اما هر مسير دوبار به حساب آمده است زيرا مسير abc با cba يكي است.

لذا تعداد بر 2 تقسيم مي شود كه برابر$168 = 6 \times 7 \times 8 \times \frac{1}{2}$ است.

تعداد را به كمك فرمولهاي تبديل به سادگي ميتوان محاسبه كرد. اما ما عمداً اين كار را انجام نداده ايم تا با روش استدلال با حل اين نوع مسائل آشنا شويد.

چون 8 رأس داريم و هر مسير به طول 2 شامل 3 رأس متمايز به صورت abc است پس بايد تعداد تبديلات 3 تايي از 8 را پيدا كنيم كه برابر$\times 7 \times 6 8$= $\frac{8!}{5!}$=$\frac{8!}{(8-3)!}$ است.

اكنون اين تعداد را بر 2 تقسيم مي كنيم همان عدد قبلي بدست مي آيد.

3ـ تعداد مسير هاي به طول 4 بين دو رأس برابر 120=(8-4)(8-3)(8-2) است. (p=8, m=4).

4 ـ براي پيدا كردن تمام مسير هاي به طول 4 در اين گراف مانند قسمت قبل عمل ميكنيم. بين هر دو رأس 120 مسير به طول 4 داريم، چون 8 رأس داريم پس هر رأس كه انتخاب كنيم با 7 رأس ديگر مي تواند دو انتهاي چنين مسيري باشد پس7 انتخاب داريم وانتخاب هر رأس نيز به 8 طريق ممكن است پس براي انتخاب هر دو رأس7×8 طريق وجود دارد كه براي هر دو راس 120 مسير داريم پس تعدا كل مسيرها $\times 7 \times 8$ 120 است كه هر مسير دوبار به حساب آمده است لذا تعداد كل$\frac{1}{2}$x $120 \times 7 \times 8$ است.

يا $\frac{1}{2} \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$

می توانيم به روش ديگر آن را محاسبه كنيم.

تعداد تبديل هاي5 از8 را داريم كه برابر $\frac{8!}{(8-5)!}$ يا$4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = \frac{8!}{3!}$ است كه بايد اين تعداد بر2 تقسيم شود، همان جواب قبلي بدست مي آيد.

مي توانيم اين مسأله را در حالت كل حل كنيم.

گراف كامل K_p مفروض است $p \geq 2$ مي خواهيم تعداد كل مسير هاي به طول m را در اين گراف پيدا كنيم.

روش اول: تعداد مسير هاي به طول m بين هر دو رأس u و v برابر (P-m) …(p-3)(p-2) است كه قبلاً محاسبه كرده ايم.

اكنون انتخاب دو رأس متمايز از p راس مي ماند كه به p(P-1) طريق ممكن است لذا تعدا مسير ها p(p-1)(p-2)… (p-m) است كه هر مسير دوبار به حساب آمده است پس تعداد كل برابر $\frac{1}{2}$ p(P-1)… (p-m) است.

روش دوم: هر مسير به طول m به صورت $ua_1a_2\ldots a_{m-1}v$ است كه انتخاب (m+1) رأس از p رأس و برابر تعداد تبديل هاي (m+1) از p مي باشد كه برابر $\frac{p!}{(p-(m+1))!}$ است.

يعني تعداد كل مسيرها $\frac{p!}{(p-(m+1))!}$ است. اما هر مسير دوبار به حساب آمده است لذا تعداد برابر $\frac{1}{2}\frac{p!}{(p-m-1)!}$ است، بنابراين:

تعداد كل مسير هاي به طول m در گراف كامل K_p برابر است با:
$\frac{1}{2}\frac{p!}{(p-m-1)!} = \frac{1}{2}$p(P-1)(P-2)… (p-m)

اكنون با استفاده از روابط فوق مي توانيم تعداد كل مسير هاي به طول1،2،3،...،P-1 را در گراف كامل K_p پيدا كنيم.

تعداد كل مسير هاي به طول 1 برابر است با:

$$\frac{1}{2}\mathrm{p}(\mathrm{p}-1) = \frac{1}{2}\frac{p!}{(\mathrm{p}-2)!}$$

تعداد كل مسير هاي به طول 2 برابر است با :

$$\mathrm{P}\ (\mathrm{P}-1)(\mathrm{p}-2)=\frac{11}{22}\frac{p!}{(p-3)!}$$

تعداد كل مسير هاي به طول m برابراست با:

$$\mathrm{p}\ (\mathrm{P}-1)\ldots\ (\mathrm{p}-\mathrm{m})\ \frac{1}{2}=\frac{1}{2}\frac{p!}{(p-m-1)!}$$

تعداد كل مسير هاي به طولp-1 برابراست با:

$$\frac{1}{2}\ \mathrm{p}(\mathrm{p}-1)\ldots(\mathrm{p}-(\mathrm{p}-2))(\mathrm{p}-(\mathrm{p}-1))= \frac{1}{2}\frac{p!}{0!}$$

بنابراین تعداد کل مسیر ها به طول 1 ، 2 ، 3 ، ...، p-1 برابر جمع این مقادیر است که برابر است با:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{p!}{(p-2)!}+\frac{p!}{(p-3)!}+.....+\frac{p!}{1!}+\frac{p!}{0!}\right)=\frac{p!}{2}\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots.+\frac{1}{(p-2)!}\right)$$

تعداد کل مسیر هاي به طول 1،2،3،...،p-1 در گراف کامل k_p برابر است با:

$$\frac{1}{2}p!\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{(P-2)!}\right)$$

توجه داشته باشید که رابطه اي که در بالا ثابت کردیم تعداد کل مسیر هاي به طول 3,2,1،...،p-1 در گراف کامل K_p است اگر منظور تعداد کل مسیرهاي به طول 1،2،...،p-1 بین دو رأس متمایز مفروضی مثلاً دو رأس v_i و v_j باشد نباید از این رابطه استفاده کنیم. چنانچه قبلاً محاسبه کرده ایم:

تعداد مسیر هاي به طول m بین دورأس v_i و v_j برابر است با:

$$(p-2)(p-3)\ldots(p-m)=\frac{(p-2)!}{(p-m-1)!}$$

لذا تعداد مسیر هاي به طول 3,2,1,...,p-1 بین دو رأس متمایز v_i و v_j درگراف کامل k_p برابر است با

$$\frac{(p-2)!}{(p-2)!}+\frac{(p-2)!}{(p-3)!}+\cdots+\frac{(p-2)!}{0!}$$

$$=(p-2)!\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\cdots+\frac{1}{(P-2)!}\right)$$

مثال 30 : درگراف کامل K_5 چند مسیر به طول 4,3,2,1 بین دو رأس متمایز a,b وجود دارد. کلاً چندمسیر به طول 4,3,2,1 در این گراف وجود دارد.

حل : براي حالت اول یعني تعداد مسیر ها بین دو رأس a ,b داریم:

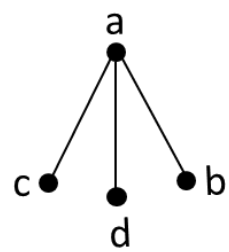
$$(5-2)!\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)=3!\left(1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)=3!\left(\frac{8}{3}\right)=16$$

و براي حالت دوم یعني تعداد کل مسیرها داریم:

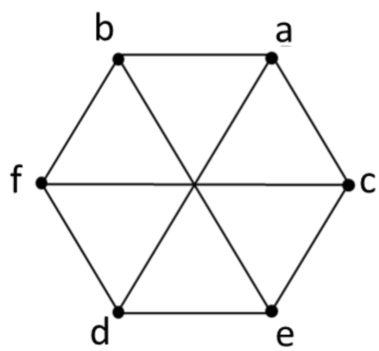
$$\frac{1}{2}\times 5!\left(\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\right)=\frac{1}{2}\times 5!\left(\frac{8}{3}\right)=160$$

مثال 31 : گراف ساده G گرافی از مرتبه 6 و 3ـ منتظم مي باشد. تعداد مسیر هاي به طول 2 را در آن پیدا کنید.

حل : هر رأس كه اختيار كنيم چون درجه آن 3 است به سه رأس ديگر متصل است لذا اگر اين رأس را رأس مياني مسير به طول 2 اختيار كنيم به اين ترتيب 3 مسير وجود دارد كه اين رأس، رأس مياني آن است.

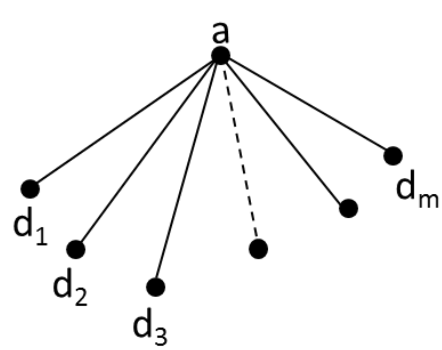


مثلاً در شكل، bad و bac وdac اين سه مسير هستند. چون 5 رأس داريم پس تعداد كل مسير ها $3\times5=15$ است. نمودار چنين گرافي به صورت زير مي تواند باشد.



مثال 32 : گراف ساده G با دنباله درجه رأس هاي (4،3،2،2،1) مفروض است در اين گراف چند مسير به طول 2 وجود دارد.

حل : به طور كلي اگر درجه ی رأس گراف ساده اي برابر m باشد $(m\geq 2)$، چون اين رأس به m رأس ديگر متصل شده است، لذا تعداد مسير هايي كه اين رأس نقطه مياني آن باشد، برابر $\binom{m}{2}$است.



زيرا اين مسيرها به صورت $d_i a d_j$ هستند كه $i \neq j$ در واقع انتخاب2 عدد ازm عدد بدون تكرار را داريم كه همان تركيب 2 از m است. با استفاده از اين رابطه با داشتن درجه هاي رأس ها در يك گراف ساده مي توانيم تعداد مسيرهاي به طول 2 را پيدا كنيم اگر دنباله درجه رأس ها در يگ گراف ساده به صورت $(m_1,m_2,\ldots,m_p)$ باشند (هر m_i را كه برابر يك باشد كنار مي گذاريم زيرا نقطه مياني هيچ مسيري نمي باشد)

آنگاه تعداد مسير هاي متمايز به طول 2 دراين گراف برابر است با:

$$\binom{m1}{2} + \binom{m2}{2} + \ldots + \binom{mp}{2}, (1 \leq i \leq p, mi \geq 2)$$

لذا دراين مثال تعداد مسيرهاي به طول 2 برابر است با:

$$\binom{4}{2}\ \binom{2}{2} = 6+3+1+1 = 11 + \binom{3}{2} + \binom{2}{2} +$$

مانند آنچه تعداد مسيرها را در گراف كامل پيدا كرديم مي توانيم تعداد دور ها را نيز در گراف پيدا كينم.

گراف كامل k_p، $p \geq 3$ مفروض است.

اگر بخواهيم تعداد دور هاي به طول m را در گراف K_p پيدا كنيم. وقتي دور به طول m باشد، بايد m رأس را انتخاب كنيم، فرض كنيم شروع دور از رأسv_1 باشد در اين صورت دور به طول m و با شروع از v_1 به صورت : $v_1\ v_2\ v_3 \ldots v_m\ v_1$

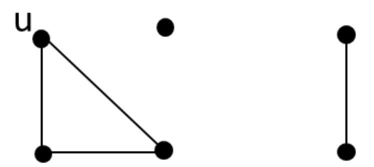
است. لذا انتخابm رأس از p رأس را داريم كه به $\binom{p}{m}$طريق صورت مي گيرد اكنون تعداد جايگشت هاي دوري آن بايد محاسبه شود لذا تعداد دورهاي به طول m در گرافK_p برابر$(m-1)!\binom{p}{m}$ بدست مي آيد كه هر دور دوبار به حساب آمده است در نتيجه تعداد دوره هاي به طول m برابر $\frac{1}{2}\binom{p}{m}(m-1)!$ است.

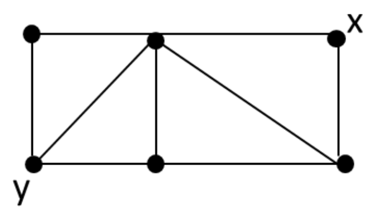
$(3 \leq m \leq p)$ توجه داشته باشيم كه رأس هاي گراف برچسب دار مي باشند.

گراف هاي همبند (connected graphs)

ميتوانيم با استفاده ازمفهوم مسير نوعي از گراف ها را بررسي كنيم كه گراف همبند يا متصل ناميده ميشوند. به طور غير رسمي مي توان گفت گرافي همبند است كه يك تكه باشد، يا به عبارتي بتوان از هر رأس آن در طول دنباله يالهاي مجاور به هر رأس ديگر رسيد.

به عنوان مثال گراف رسم شده در نمودار زير همبند نمي باشد بلكه ميتوان آن رابه چهار تكه تقسيم كرد كه هرتكه يك گراف همبند است.





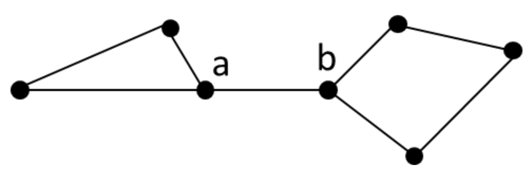
مشاهده میکنیم که مسیري بین x,y وجود دارد که در همین زیر گراف مي باشد، اما بین دو رأس u و y یا بین دو رأس x و u هیچ مسیري وجود ندارد.

با توجه به مقدمات فوق تعریف زیر را داریم.

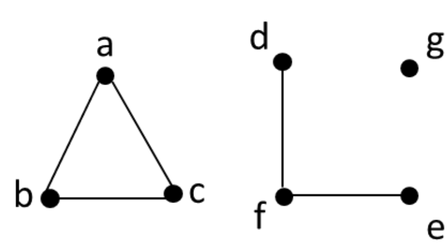
تعریف: يك گراف G همبند است هرگاه بین هردو رأس آن مسیري وجوداشته باشد. درغیر این صورت آن را ناهمبند مي نامیم.

در گراف همبند G، یالي را که اگر برداشته شود گراف ناهمبند می شود پل می نامیم.

هر گراف ناهمبند میتواند به تعدادی زیر گراف همبند بخش شود که آنها را مؤلفه ها مي نامیم.

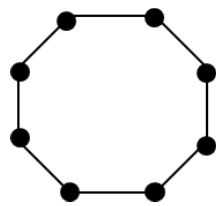


در شکل یال ab يك پل است زیرا اگر آن را برداریم گراف ناهمبند مي شود. درشکل زیر گراف نا همبند G داراي سه مؤلفه است.

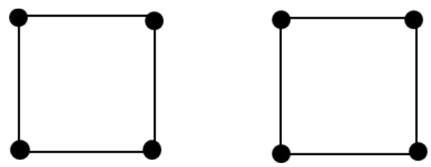


مثال 33 :

1ـ يك گراف همبند با 8 رأس رسم كنيد.



2ـ يك گراف نا همبند با 8 رأس رسم كنيد كه داراي دو مؤلفه باشد.



مثال 34 : كدام يك از بيانيه هاي زير صحيح مي باشد وكدام صحيح نمي باشد.

1ـ گراف تهي كه حد اقل دو رأس دارد همبند است.

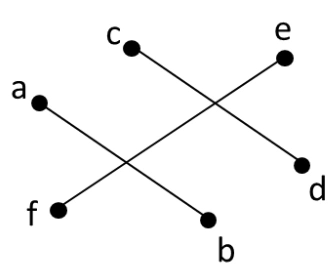
2- هرگراف كامل K_p همبند است.

3- اگرگرافي ناهمبند باشد، حداقل دورأس دارد.

4 ـ فرض كنيم u و v دو رأس گراف G باشند كه دوري ازگراف شامل آن دوباشد، اگريك يال از اين دور حذف كنيم بازهم مسيري از u به v وجود دارد.

5- اگر G يك گراف همبند و G شامل يك دور باشد، آنگاه ميتوان يك يال اين دور را حذف كرد بدون آن كه گراف ناهمبند شود.

6 ـ گراف رسم شده درشكل همبند است.



7- هر گراف ساده از مرتبه p كه همبند باشد حد اقل p-1 يال دارد. يعني $q\geq p-1$ و لذا اگر $q< p-1$ ناهمبند است.

حل :

1ـ نادرست است. اگر گرافي فقط يك رأس داشته باشد آن راهمبند به حساب مي آوريم.

2ـ صحيح است. درگراف كامل بين هر دو رأس مسيري وجود دارد.

3- صحيح است. وقتي ناهمبند است حد اقل دومؤلفه دارد كه هر مؤلفه لا اقل يك رأس دارد.

4- صحيح است. زيرا با حذف يك يال از هر دور آن دور به يك مسير تبديل مي شود.

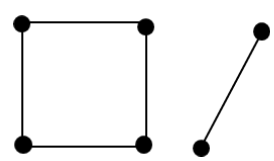
5ـصحيح است. زيرا با حذف يك يال از يك دور آن دور به مسير تبديل مي شود لذا بين هر دو رأس آن دور يك مسير داريم پس گراف همبند باقي مي ماند.

6- نادرست است. بين a و c يا d يا f يا e مسيري نداريم.

اين گراف ناهمبند شامل سه مؤلفه يا سه بخش است.

7- صحيح است. درهر گراف همبند بين هر دو رأس مسيري وجود دارد. چون p رأس داريم پس حد اقل با p-1 يال مي توان رأس ها را بهم متصل كرد.

توجه داشته باشيد كه عكس اين گفته همواره صحيح نمي باشد يعني ممكن است گرافي ازمرتبه P داراي P-1 يال باشد اما همبند نباشند. مانند شكل زير:



گرافي ازمرتبه 6، 5 يال دارد اما همبند نمي باشد.

مثال 35: ثابت كنيد در هر گراف همبند از مرتبه p،$(p\geq 2)$ حد اكثر درجه هر رأس برابر تعداد يال ها يعني q است.

حل : مي دانيم در هر گراف همبند درجه هر رأس حد اقل برابر يك است. فرض كنيم گراف همبند رأسي از درجه q+1 داشته باشد لذا $q+1\leq p-1$ يا $q\leq p-2$. اگر δ مينيمم درجه رأس ها باشد واضح است كه $\delta\geq 1$ درنتيجه؛

$$2q=\sum_{i=1}^{p} \deg(v_i) \geq (q+1)+(p-1)\delta \geq (q+1)+(p-1)=q+p$$

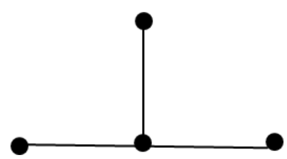
بنابراین $q\geq p$ که متناقص با فرض $q\leq p-2$ است. لذا رأس با درجه q+1 وجود ندارد. بنابراین:

در هر گراف همبند، از مرتبه p، $p\geq 2$ و اندازه q به ازاي هر $1\leq i \leq p$، $1\leq \deg(vi) \leq q$

قضيه: اگر در گراف ساده G ازمرتبه p و اندازه q داشته باشيم $2q> (p-1)(p-2)$ آنگاه G همبند است.

اثبات: مي دانيم گراف كامل ازمرتبه (p-1) همبند است آن را G' مي ناميم و در اين گراف تعداد يالها برابر $\binom{p-1}{2} = \frac{1}{2}$ (p-1)(p-2) است. حال اگر يك رأس به G' اضافه كنيم گراف G ازمرتبه p بدست مي آيد براي آن كه گراف G همبند شود كافي است فقط حداقل يك يال از اين رأس اضافه شده به يكي از رأس هاي G متصل شود در اين صورت تعداد يالهاي گراف همبند G حداقل $\binom{p-1}{2}+1$ است يعني $q\geq \binom{p-1}{2}+1$ بنابراين اگر $q> \binom{p-1}{2}$ يا $2q > (p-1)(p-2)$ همواره مي توان يك گراف همبند ساخت.

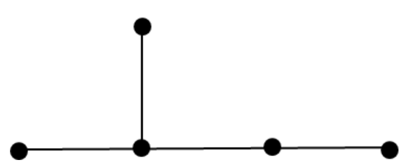
يادداشت: عكس اين قضيه همواره صحيح نمي باشد. يعني ممكن است گراف G همبند باشد اما $q\leq \binom{p-1}{2}$ يا $2q \leq (p-1)(p-2)$. مثلاً در گراف همبند H كه در زير رسم شده است p=4 و q=3 .



H

$2q=6=3\times 2 = (p-1)(p-2)$

يا در گراف G رسم شده در شكل داريم:



G

q=4 ,p=5

2q=8 ,(p-1)(p-2)=4×3=12

پس $2q< (p-1)(p-2)$.

اما مشاهده ميكنيم كه گراف همبند است.

گراف هاي اويلري وهميلتوني (Eulerian and Hamiltonian Graphs)

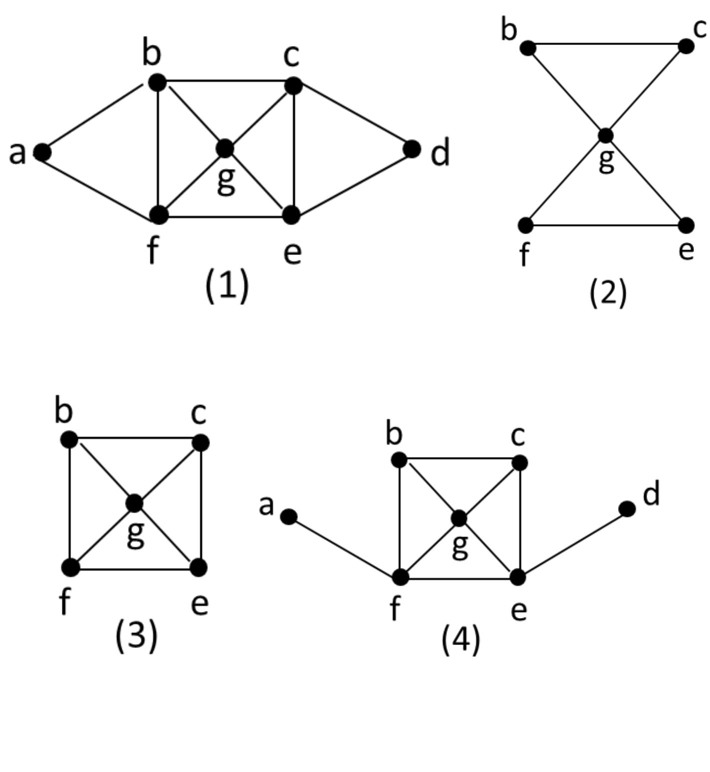
در اين قسمت دو نوع مهم ازگراف را بررسي مي كنيم. گراف هاي اويلري وهميلتني كه به نام هاي لئونارد اويلر و ويليام راون هميلتون نام گذاري شده اند.

تعريف: گراف G مفروض است. يك دور اويلري براي گراف G دوري است كه شامل هر رأس و هر يال G باشد. يعني، يك دور اويلري براي G يك دنباله از رأس ها ويالهاي مجاور درG است كه انتها و ابتداي آن يك رأس باشد، هررأس **حد اقل** يك بار و هر يال **دقيقاً** يك بار به كار مي رود.

گرافي را كه شامل يك دور اويلري باشد، گراف اويلري مي ناميم. در واقع در دور اويلري ازهيچ يالي نبايد دوبار عبور كنيم حتي اگر از رأس هايي چندين بار بگذريم، بنابراين گراف اويلري بر حسب يالها تعريف مي شود.

تعريف: گراف G راهميلتني گوييم هرگاه داراي دوري باشد كه شامل تمام رأس ها باشد يعني اگر ازمرتبه p باشد، شامل دوري به طول p باشد.

مثال 36 : كدام گراف اويلري يا هملتني است.



حل : گراف(1) هم اويلري وهم هميلتني است، abfgbcgecdefa يك دور اويلري است.همچنين اين گراف از مرتبه 7 و داراي دوري به طول 7 است، abgcdefa دوري به طول 7 است لذا هميلتني است. گراف(2) اويلري ميباشد اما هميلتني نمي باشد.

دور bcgfegb يک دور اويلري است و لذا گراف (2) اويلري مي باشد اما اين گراف دوري به طول 5 ندارد.

گراف (3) هميلتني است اما اويلري نمي باشد.

bcgefb يك دورهميلتني است دوري به طول 5 دارد ومرتبه گراف نيز 5 است.

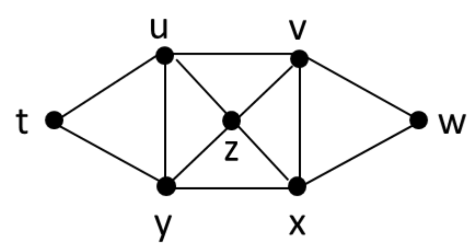
گراف(4) نه اويلري است ونه هميلتني هيچكدام نمي باشد.

اكنون قضيه هايي را بيان خواهيم كرد كه درشناسايي گراف هاي اويلري وهميلتني اهميت دارند.

توجه داشته باشيم كه گراف هاي اويلري وهميلتني همبند مي باشند.

قضيه: فرض كنيم G گرافي باشد كه هر رأس آن از درجه زوج باشد. دراين صورت G را مي توان به دور هايي بخش كرد كه هيچ دو دوري يال مشترك نداشته باشند.

مثال 37 : نشان دهيد چگونه مي توانيم گراف زير را به بخش هاي دوري تقسيم كنيم كه هيچ دو دوري يال مشترك نداشته باشند.



حل : مي توانيم اين گراف را به 4 دور c_1 ، c_2 ، c_3 و c_4 تقسيم كنيم كه هيچ دو دوري يال مشترك نداشته باشند اين 4 دور عبارت اند از:

tuy ,uvz ,vwx ,xzy

مهمترين قضيه درشناخت گراف هاي اويلري قضيه زير است.

قضيه : يك گراف همبند اويلري است اگر و فقط اگر هر رأس آن از درجه زوج باشد.

در واقع قضيه فوق معادل دو قضيه زير است.

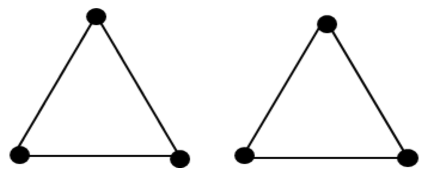
1- اگر G يك گراف اويلري باشد، آنگاه هررأس آن از درجه زوج است.

2- اگر هر رأس گراف همبند G داراي درجه زوج باشد، آنگاه G يك گراف اويلري است.

در قسمت (2) شرط همبند بودن گراف لازم است.

زيرا گراف هاي زيادي وجود دارند كه درجه تمام رأس ها درآنها زوج باشد اما اويلري نباشند.

مانند شكل زير:



هر گراف فوق از درجه زوج است اما گراف اويلري نمي باشد، زيرا گراف همبند نيست.

همچنين از قضاياي فوق مي توان نتيجه زير را گرفت كه در رد گراف هايي اويلري مفيد است.

قضيه: اگر رأسي دريك گراف از درجه فرد باشد آنگاه اين گراف اويلري نمي باشد.

زيرا درهر گراف اويلري هر رأس از درجه زوج است.

مثال 38: كدام گراف اويلري است؟

1- گراف كامل K_8، يعني گراف كامل از مرتبه 8.

2- گراف كامل k_5، يعني گراف كامل از مرتبه5.

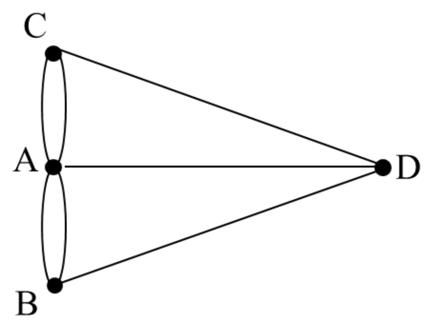
(1)k_8 گراف اويلري نمي باشد زيرا اين گراف 7ـ منتظم است يعني هررأس از درجه فرد است.

(2)K_5 اويلري است، زيراهمبند است وهر رأس آن از درجه زوج است. گراف4 ـ منتظم است.

با توجه به مثال فوق نتيجه زير گرفته مي شود.

هر گراف كامل K_p كه در آن $p \geq 3$ وpعددي فرد باشد يك گراف اويلري است. زيرا درجه هر رأس عددي زوج است.

اكنون اگر به مسأله هفت پل گونيكسبرگ برگرديم نموداري مانند شكل زير براي آن رسم كرديم.



مشاهده مي كنيم كه اين گراف داراي دور اويلري نمي باشد ولذا گراف اويلري نيست زيرا تمام رأس ها از درجه فرد است. پس نمي توان از تمام رأس ها و پل ها گذشت به طوري كه از هر پل فقط يك بار بگذاريم. ازنتايج ديگر مهمترين قضيه اين بخش يعني قضيه شناخت گراف اويلري آن است كه گشتي از يك رأس به رأس ديگر پيدا كنيم به طوري كه از هر رأس حد اقل يك بار گذشته و از هر يال دقيقاً يك بار بگذرد.

ابتدا تعريف زير را داريم:

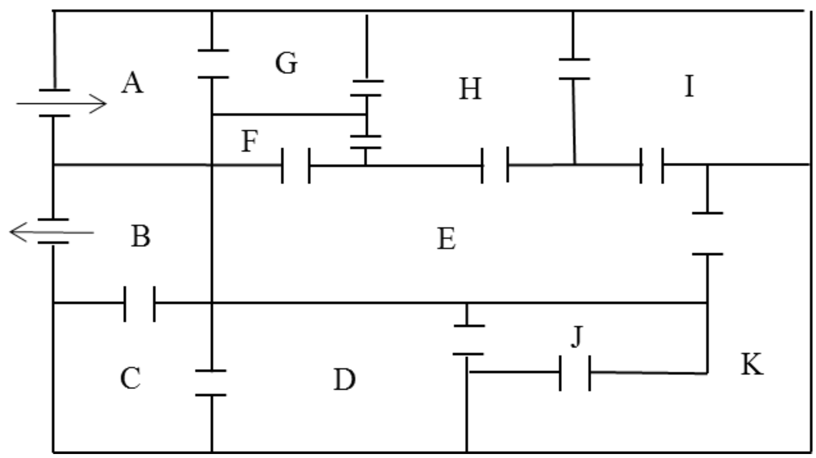
تعريف: گراف G و دو رأس u وv از آن مفروض اند. يك مسير اويلري از v به u يك دنباله از يالها و رأس هاي مجاور است كه ابتداي آن يا شروع آن v وانتهاي آن u باشد، به طوري كه از هر رأس حد اقل يك بار گذشته ، و از هر يال دقيقاً يك بار بگذرد.

با استفاده ازتعريف فوق قضيه زير راداريم:

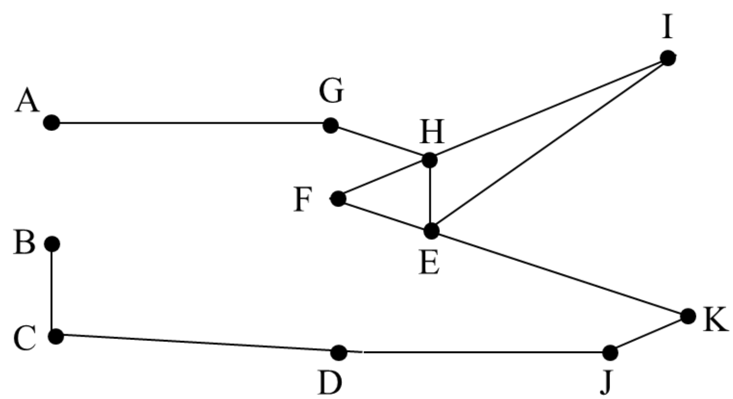
قضيه: گراف G و دو رأس u وv از آن مفروض اند. يك مسير اويلري از v به u وجود دارد اگر وفقط اگر،G گرافي همبند، v وu از درجه فرد باشند، و تمام رأس هاي ديگر داراي درجه زوج باشند. چنين گرافي را گراف نيمه اويلري نيز مي نامند.

مثال 39 : نقشه يا پلان كف يك ساختمان درشكل زيررسم شده است. آيا مي توانيد يك مسيري پيدا كنيد كه ازاتاقA شروع وپايان آن اتاق B باشد، به طوري كه از هر درب داخلي اتاق هاي ساختمان فقط يك بار عبور كنيم؟ يعني يك مسير اويلري با ابتداي A و انتهاي B پيدا كنيم.

حل : مي خواهيم از درب ورودي اتاق A وارد ساختمان شويم واز درب خروجي اتاقB ازساختمان خارج شويم. مهم نيست ازهراتاق چند بار بگذريم (رأس ها) اما بايد ازهردرب بين دواتاق دقيقاً يك بار عبور كنيم.



ابتدا نمودار گرافي ساختمان را درشكل ذيل رسم كرده ايم. هر اتاق را با يك رأس و درب هاي بين دو اتاق را با يالها نشان داده ايم.



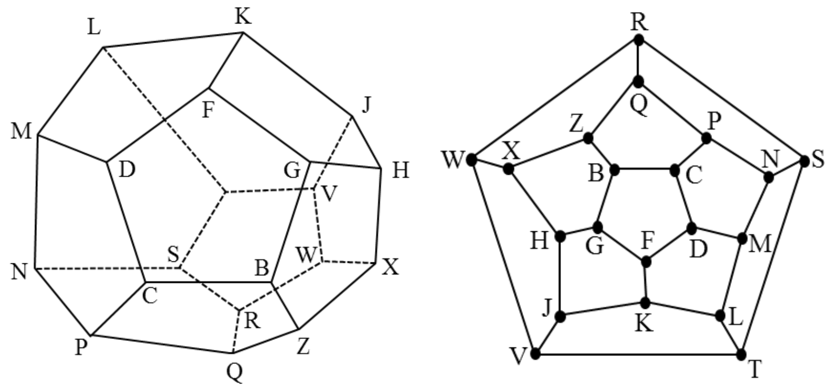
هر رأس اين گراف از درجه زوج است به جز رأس هاي A وB كه از درجه فرد مي باشند. لذا بنابر قضيه قبل يك مسير اويلري ازA وB وجود دارد. اين مسير به صورت زير است: AGHFEIHEKJDCB اكنون كه با گراف هاي اويلري بيشتر آشنا شديم ويژگي هايي از گراف هميلتني را بررسي كنيم.

ويژگي هاي گراف هميلتني

تعريف كرديم كه گراف هميلتني گرافي است كه در آن دوري وجود داشته باشد كه تمام رأس ها بگذرد يعني دوري به طول مرتبه گراف داشته باشد. صفت هميلتني به افتخار رياضيدان ايرلندي ويليام هميلتن (1805 - 1865) است كه وجود جوابي براي بازي دور دنيا را مورد بررسي قرار داد.

در اين بازي از بازيكن خواسته مي شود كه راهي درامتداد يالهاي يك دوازده وجهي يعني يك چند وجهي منتظم با 20 رأس، 30 يال و12 وجه چنان پيدا كنيم كه از هررأس دقيقاً يك بار گذشته وسپس به رأس شروع حركت بازگرديم.

درشكل هاي زيراين دوازده وجهي ونمودار گرافي آن درصفحه رسم شده است.



اين گراف داراي 20 رأس و30 يال است. اين بازي داراي جواب است اگر و فقط اگر G گراف هميلتني باشد. بازي كن مي تواند از شروع با پنج حرف مفروض مثلاً پنج حرف اوليه BCPNM به دو روش يك دورهميلتني را كامل كند.

اين دو دور عبارت انداز: BCPNMDFKLTSRQZXWVJHGB

BCPNMDFGHXWVJKLTSRQZB

مثال 40

1- چند دور هميلتني در گراف دوازده وجهي با شروع از JVTSR وجود دارد؟

2- يك مسير در گراف دوازده وجهي با شروع از BCD پيدا كنيد كه انتهاي آن T باشد، و شامل هر رأس دقيقاً يك بار باشد.

حل

(1) دو دور هميلتني به اين صورت وجود دارد:

JVTSRWXZWQPNMLKFDCBGHj

JVTSRWXHGFDCBZQPNMLKj

توجه داشته باشيد كه رأس بعد از R بايد W باشد، زيرا درغيراين صورت رأسW حذف مي شود.

(2) فقط يك چنين مسيري وجود دارد كه به صورت زير است.

BCDFGHXZQPNMLKJVWRST

اگر يك گراف هميلتني داشته باشيم با اضافه كردن يك يال به آن گراف هميلتني ديگري بدست مي آيد، زيرا مي توانيم دور هميلتني مانند قبل اختيار كنيم.

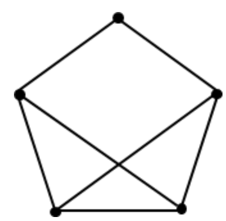
به اين ترتيب گراف هاي با درجه رأس هاي بزرگتر ويالهاي بيشتر بدست مي آيد كه بيشتر شبيه گراف هاي هميلتني با رأس هاي ازدرجه كمتر است. ميتوانيم اين ايده را به روش هاي مختلفي انجام دهيم.

يكي ازاين روش ها درسال1960توسط ايستن ار(Oystein Ore) ثابت شده است.

قضيه Ore: اگر G گرافي ساده وهمبند با n رأس باشد كه $n\geq 3$، وبه ازاي هر دو رأس غير مجاور u و v داشته باشيم: $\deg(v)+\deg(u)\geq n$ آنگاه G يك گراف هميلتني است.

به عنوان مثال، در گرافي كه درزيررسم شده است، به ازاي هردو زوج رأس غير مجاور u و v،

$\deg(v)+\deg(u)\geq 5$ لذا بنابر قضيه ار اين گراف هميلتني است.



قضيه ي زير توسط Dirac درسال 1952 ثابت شده است.

قضيه: فرض كنيم G گرافي ساده وهمبند با n رأس باشد، كه $n\geq 3$ و به ازاي هر رأس v، $\deg(v)\geq \frac{n}{2}$ دراين صورت گراف G هميلتني است.

اثبات به كمك قضيه Oer ساده است.

به ازاي هررأسv، $\deg(v)\geq \frac{n}{2}$ درنتيجه براي هردو رأس u و v كه مجاور باشند يا نباشند $\deg(v)+\deg(u)\geq n$ ، لذا گراف هميلتنى است.

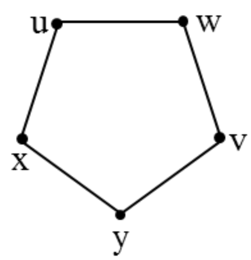
مثال 41 : هرگراف كامل k_p كه $p\geq 3$ هميلتني است.

حل : زيرا k_p كه $p\geq 3$، همبند وساده است ازطرفي درجه هررأس برابر $p-1$ است و$p-1\geq \frac{p}{2}$ به ازاي $p\geq 3$ برقرار است لذا هميلتني است.

يادداشت: عكس قضيه Oer صحيح نمي باشد. ممكن است گراف G هميلتني باشد اما دورأس غير مجاوري مانند u و v درآن باشد كه $\deg(v)+\deg(u)< n$ كه n مرتبه گراف است.

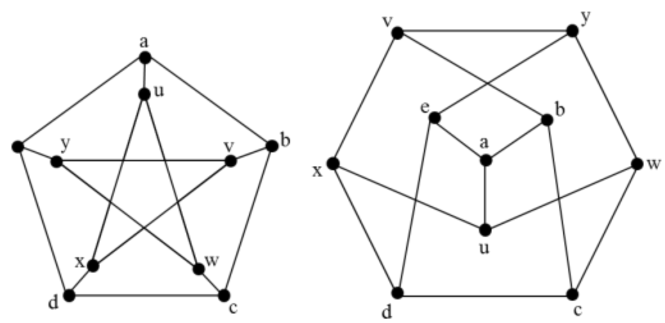
درگراف رسم شده n=5 و $deg(u)+deg(v)=4 < 5$ به طور كلي گراف هر n ضلعي كه $n \geq 5$ هميلتني است وچون درجه هررأس آن دو است پس به ازاي هر دو رأس دلخواه آن

$$\deg(v) + \deg(u) = 2+2 = 4 < 5 \leq n$$



گراف پترسن (Petersen)

گراف پترسن به نام رياضي دان دانماركي جوليوس پترسن ناميده شده است. او اين گراف رادرسال 1898 درنوشته هايش مطرح كرده است. گراف پترسن يك گراف3- منتظم از مرتبه 10 است ودارای 15 يال است. اين گراف به صورت هاي مختلفي مي تواند نشان داده شود. دوفرم آن درشكل هاي زير نشان داده شده است. اين دو گراف رسم شده يكريخت هستند چرا؟



abcdea دوري به طول5 دراين گراف است.

abvyea نيز دوري به طول 5 است وبه همين ترتيب دور هاي ديگري به طول5 داريم.

abvxdea، xvywcdx ونظاير آنها دوره هاي به طول 6 دراين گراف مي باشند.

اين گراف دور به طول 7 ندارد.

اما دورهاي به طول8 و9 نيز دارد.

abcwuxdea دور به طول 8 است.

abvxdcwyea دور به طول 9 است. این دور فقط شامل u نمي باشد. این گراف دور به طول 10 ندارد یعني دوري وجودندارد که ازتمام رأس هاي آن بگذارد لذا هميلتني نمي باشد.

گراف های وزن دار

در اینجا گراف وزن دار معرفی می شوند که در آن ها با نسبت دادن یک عدد حقیقی نامنفی به هر یال ساخته می شوند. این اعداد اطلاعاتی را برای فاصلهٔ دو رأس تشکیل دهندهٔ یال به دست می دهند. این اطلاعات ممکن است طول فاصله آن دو رأس (مثلاً برحسب متر و یا کیلومتر)، مقدار کالایی که می توان در امتداد یک یال ارسال نمود(که این یال ممکن است نشان دهنده ی یک آزاد راه یا یک خط هوایی باشد.) یا زمان لازم برای رفتن از یک رأس به رأس مجاور و . . . باشد.

تعریف: گراف سادهٔ G(V, E) را در نظر بگیرید به هر یال e=uv از این گراف یک عدد حقیقی غیرمنفی را نسبت می دهیم و آن را وزن یال e نامیده و با W(e) نشان می دهیم. گراف G را **وزن دار** می نامیم هرگاه یال های آن دارای وزن باشند.

تذکر: همان گونه که بیان شد وزن یال ab ممکن است:

1- طول آزاد راه از a به b باشد.

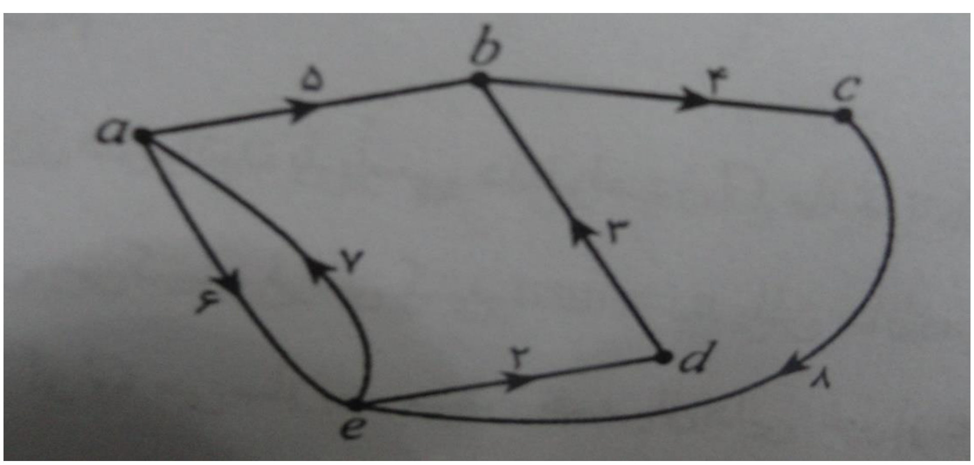
2- مقدار کالایی باشد که از a به b حمل می شود.

3- هزینهٔ مسافرت از a به b باشد.

4- حق بیمه پرداختی برای رفتن از a به b باشد.

5- مدت زمان مسافرت برای رفتن از a به b باشد.

مثال 42 : گراف وزن دار زیر خطوط راه آهن موجود بین 5 شهر را نشان می دهد. در این گراف وزن هر یال مانند (a, b) مدت زمان تقریبی رفتن از شهر a به شهر b برحسب ساعت است.



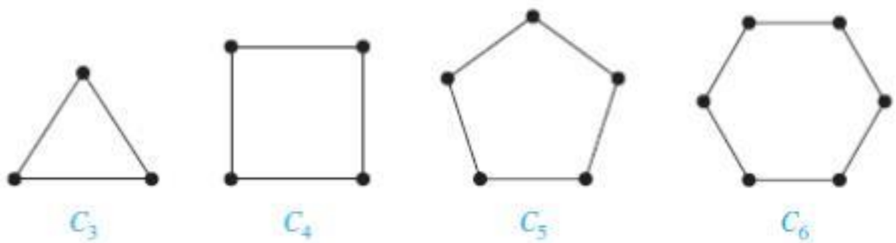
مثال 43: وزن مسیر abce و دور abcea در مثال قبل به ترتیب عبارتند از 17 و 24 ، زیرا

وزن مسیر $abce = 5+4+8=17$

وزن دور $abcea=5+4+8+7=24$

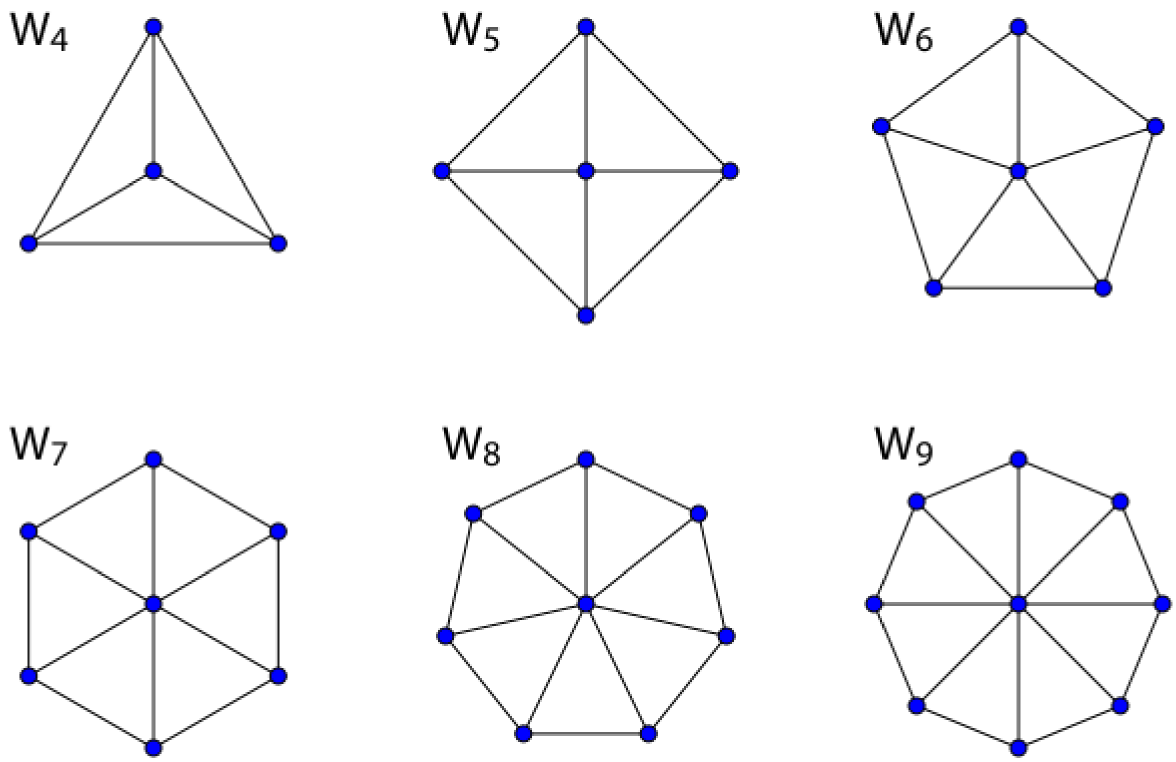
گراف دوری(Cycle Graph)

گرافی که شامل n رأس $(n\geq3)$ $v_1, v_2, \ldots, v_n$ و n یال $\{v_1, v_2\}$ و $\{v_2, v_3\}$ و . . . $\{v_{n-1}, v_n\}$ می باشد. گراف دوری را با C_n نشان می دهند.



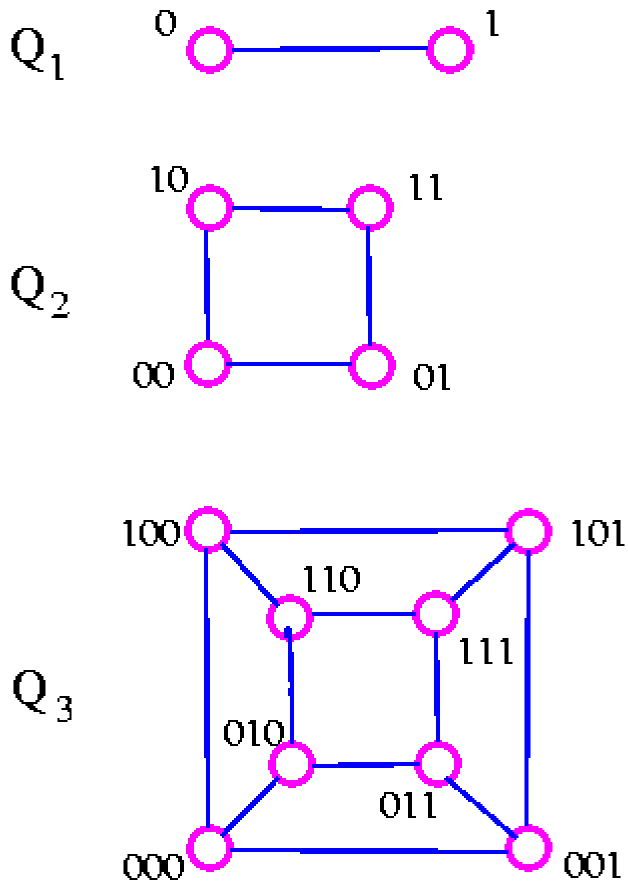
گراف چرخی (Wheel Graph)

گرافی که با اضافه کردن یک رأس به مرکز گراف C_n و اتصال دادن آن رآس به تمام راسهای C_n حاصل می شود و آن را با W_n نشان می دهند. در اشکال زیر تعدادی از گراف های چرخی نمایش داده شده است.



گراف n – مکعب (n-cube graph)

گرافی که رأسهای آن نمایانگر 2^n رشته بیت به طول n باشد و دو رأس مجاورند اگر و فقط اگر در یک بیت با هم تفاوت داشته باشند. گراف n – مکعب را با Q_n نمایش می دهند. در زیر تعدادی از گراف های نامبرده نمایش داده شده اند.



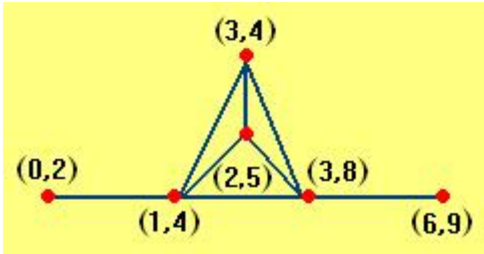
گراف بازه ای (Interval graph)

فرض می کنیم مجموعه ای از بازه های باز داریم. اگر این بازه ها را به عنوان رئوس و اتصال دو رأس را، به شرط غیرخالی بودن بودن تقاطع بازه های متناظر، یال ها در نظر بگیریم، گرافی می توان رسم کرد که به آن گراف بازه ای ها میگویند. به عبارت دریگر گراف بازه ای متناظر با بازه های باز $I_1, I_2, \ldots, I_n$ گرافی است که رئوس آن بازه های باز $I_1, I_2, \ldots, I_n$ بوده و در صورتی دو راس مجاورند(میانشان یال وجود دارد) که بازه های متناظر آن دو راس اشتراک غیرخالی داشته باشند.

مثال 44: به عنوان مثال می خواهیم گراف بازه ای متناظر با بازه های زیر را رسم کنیم :

$$(6, 9), (3, 8), (3, 4), (2, 5), (1, 4), (0, 2)$$

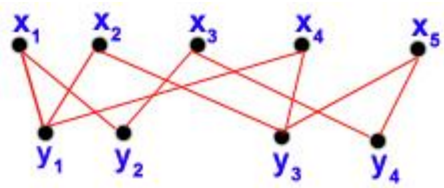
پاسخ : دو بازهٔ (1, 4) و(0, 2) تقاطع غیرخالی دارند، لذا راس های متناظر این دو بازه را با یک یال به هم وصل می کنیم. ولی دو بازه (0, 2) و (2, 5) اشتراکشان خالی است، پس راس هایی متناظر این دو بازه به هم وصل نمی شوند. به این ترتیب به همین استدلال نمودار گراف بازه ای شش بازه ی فوق به صورت زیر در می آید:



گراف های دو بخشی(Bipartite Graph)

گراف دوبخشی، گرافی است که بتوان ست رأس های آن را به دو سب ست V_1 و V_2 چنان افراز نمود که هر یال آن دارای یک رأس در V_1 و یک رأس در V_2 باشد. چنین افرازی را دو بخشی کردن گراف نامند.

مثال 45 : گراف شکل ذیل یک گراف دوبخشی است.

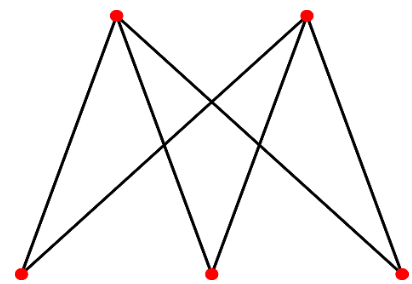


زیرا که در این گراف، ست رئوس را می توان به دو ست$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ = V_1 و $V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ چنان افراز نمود که هیچ دو راسی در این دو ست با هم مجاور نباشند و هر یال تنها یک انتها در ست اول و یک انتها در ست دوم داشته باشد.

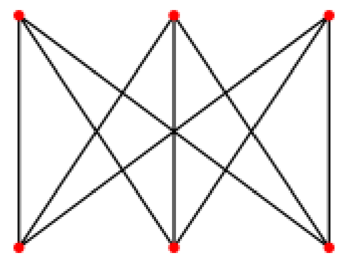
گراف دو بخشی کامل(Complete Bipartite Graph)

گراف دو بخشی G با ست افراز های V_1 و V_2 را کامل گوییم هرگاه بین هر رأس V_1 و V_2 یالی وجود داشته باشد. اگر V_1 شامل m رأس و V_2 شامل n رأس باشد، آنگاه گراف دوبخشی کامل را با $K_{m,n}$ نشان می دهیم(به طور معمول $m \le n$ در نظر گرفته می شود). گراف دوبخشی کامل را طور ذیل نیز تعریف نموده می توانیم: اگر G یک گراف دو بخشی باشد که در آن هر رأس از V_1 به تمام راسهای V_2 وصل شده باشد، G را یک گراف **دو بخشی کامل** می نامیم.

نمونه های زیر گراف های دو بخشی کامل را نمایش می دهند.

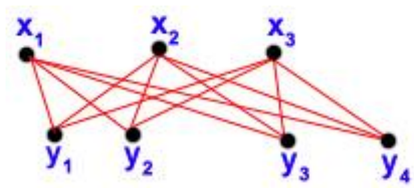


$K_{2,3}$



$K_{3,3}$

گراف ذیل یک گراف کامل دو بخشی $k_{3,4}$ است.



نکته: گراف دوبخشی کامل $K_{m,n}$ دارای $m+n$ رأس و mn یال می باشد.

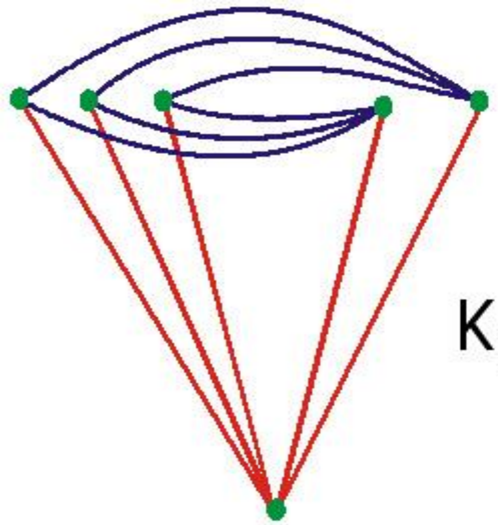
گراف چند بخشی

اگر بتوان رأس های یک گراف را به K بخش V_1 و V_2 و . . . افراز کرد به طوری که هر یال در گراف، یک رأس از V_i را به یک رأس از V_j $(i\neq j)$ وصل کند، آنگاه گراف را K بخشی می نامیم.

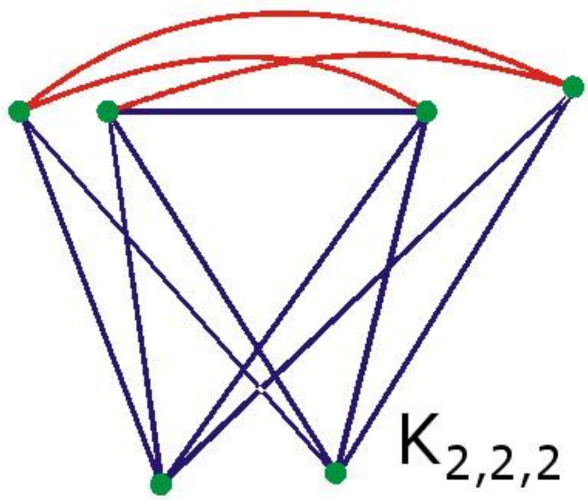
گراف چند بخشی کامل

در یک گراف K – بخشی اگر هر رأس از V_i با هر رأس از V_j $(i\neq j)$ مجاور باشد، گراف را K – بخشی کامل می نامیم و می نویسیم. $K_{n1, n2, . . . , nk}$ که $|V_i|=n_i$.

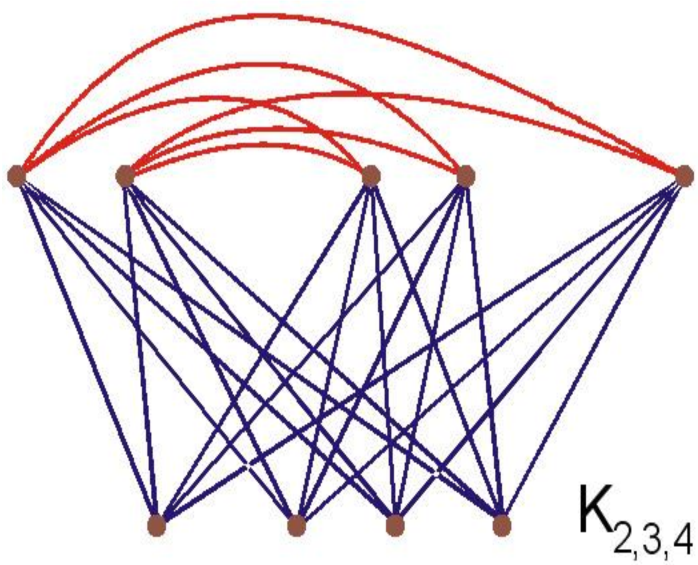
گراف های زیر نمونه هایی از گراف های چند بخشی کامل هستند.



$K_{1,2,3}$



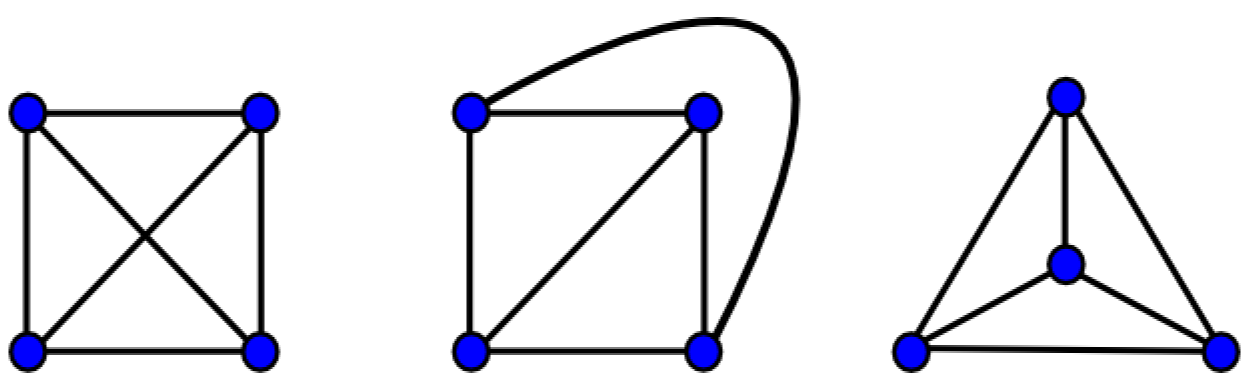
$K_{2,2,2}$



گراف های مسطح (plnar graphs)

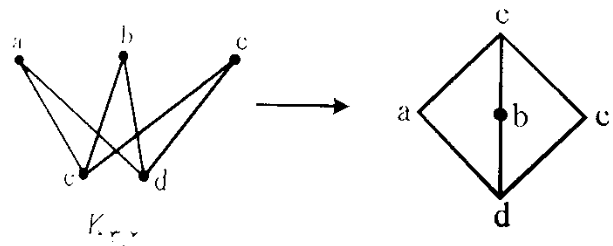
گراف G را مسطح گوییم هرگاه بتوان آن را به گونه ای رسم کرد که یال هایش (به جز در رأسها) همدیگر را قطع نکنند.

مثال 46: گراف کامل K_4 یک گراف مسطح است. اگر چه گراف کامل k_4 به طور معمول با یال های متقاطع مانند شکل ذیل، جزء الف رسم می شود، اما با وجود این ، می توان آن را با یال های متقاطع مانند شکل ذیل، جزء ب رسم کرد. از این رو، گراف کامل k_4 مسطح است.

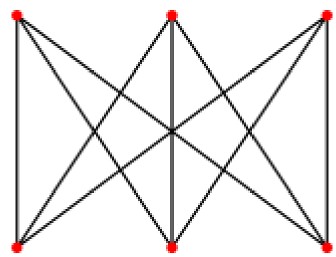


(الف) (ب)

مثال 47: گراف های $K_{3, 2}$ مسطح است، زیرا:



مثال 48: گراف $K_{3,3}$ مسطح نیست.



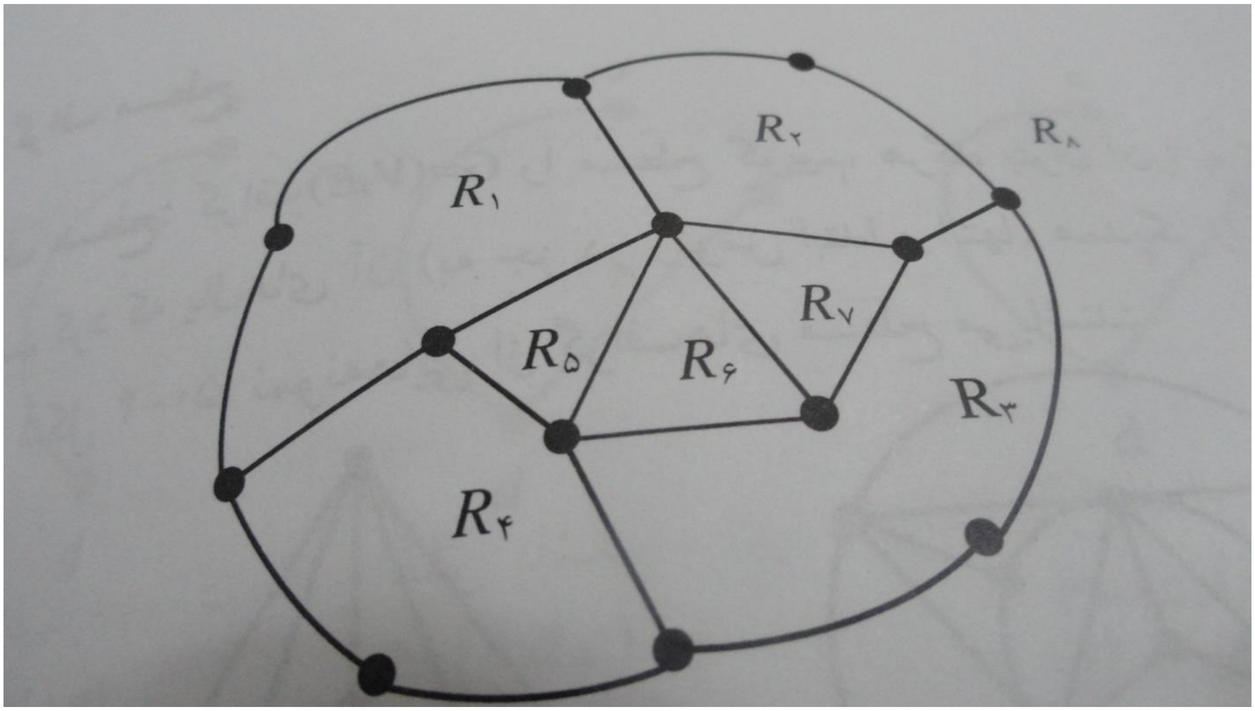
ناحیه(وجه)

در ترسیم گراف مسطح، قسمتی از شکل که توسط تعدادی از یال محصور شده است، ناحیه یا وجه می نامیم.

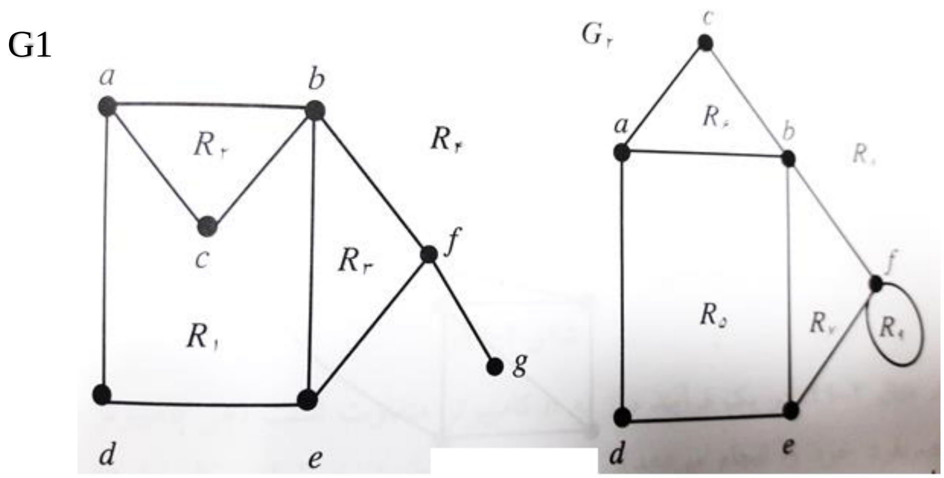
درجهٔ ناحیه

به تعداد یال های هر ناحیهٔ گراف مسطحه G درجهٔ آن ناحیه گفته می شود.

مثال 49 : گراف زیر دارای 7 ناحیهٔ داخلی R_1 , R_2 , R_3 , R_4 , R_5 , R_6 , R_7 و یک ناحیهٔ خارجی R_8 می باشد، بنابراین گراف زیر 8 ناحیه دارد.



مثال 50 : دو گراف G_1 و G_2 را در نظر بگیرید. درجهٔ هر ناحیه و مجموع درجه های نواحی هر گراف را بیابید.



حل:

$$\sum_{i=1}^{4} \deg(Ri) = 18$$

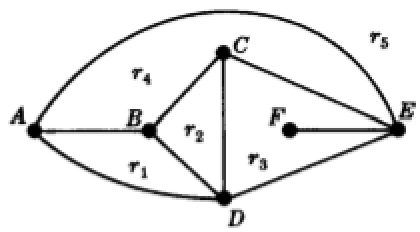
G_2: $\deg(R_5)=4$ $\deg(R_6)=\text{dge}(R_7)=3$ $\deg(R_8)=7$ $\deg(R_9)=1$

$$\sum_{i=5}^{8} \deg(Ri) = 18$$

قضیه: مجموع درجه های ناحیه های یک نقشه دوبرابر تعداد یال های آن است.
به گونه ی مثال، اگر R_i نواحی گراف مسطح G باشند، آنگاه $\sum \deg(Ri) = 2e$ می شود. در مثال فوق دیدیم که تعداد یال های هر دو گراف نامبرده مساوی به 9 بود که دوچند آن مساوی به 18 می شود، از طرف دیگر مجموع درجات ناحیه های هر کدام از گراف های فوق نیز مساوی به 18 است.

نقشه ها، ناحیه ها

به نمایش خاصی از یک گراف چندگانهٔ محدود، نقشه می گویند. یک نقشه را همبند گویند، اگر گراف چندگانهٔ اصلی آن همبند باشد. یک نقشه صفحه را به ناحیه های متعدد تقسیم می کند. برای مثال، نقشهٔ شکل ذیل که شش رأس و نه یال دارد، صفحه را به پنج ناحیه تقسیم کرده است.



ملاحظه می کنیم که چهار تا از این ناحیه ها محدود شده است، اما ناحیهٔ پنج که در خارج نمودار است، محدود نشده است. بنابراین، بدون این که کلیت شمارش تعداد ناحیه ها از دست برود، فرض می کنیم به جای قرار دان نقشه در تمام صفحه، نقشه در یک مستطیل بزرگ قرار دارد. ملاحظه می کنید که مرز هر نقشه شامل یک دنباله از یال است. و گاهی اوقات نیز دور تشکیل می دهند. به طور مثال در شکل فوق، مرز های تمام ناحیه های بجز r_3 دور هستند. با وجود این، اگر با شروع از یک رأس مثلاً رأس C در خلاف جهت حرکت عقرب ساعت حرکت کنیم، آنگاه مسیر بستهٔ :

(C, D, E, F, E, C)

به دست می آید که در آن {E, F} دوبار ظاهر می شود. منظور از درجهٔ ناحیه r که به صورت deg(r) نوشته می شود، طول یا دور گذر بسته ای است که ناحیهٔ r را محدود کرده است. توجه داشته باشید که هر یال، یا دو ناحیه را محدود می کند، یا در داخل یک ناحیه قرار دارد و در نتیجه، از هر گذر دلخواهی که روی مرز آن ناحیه است دوبار ظاهر می شود.

در شکل فوق درجات ناحیه های فوق قرار ذیل است:

$Deg(r_1)=3,\ deg(r_2)=3,\ deg(r_3)=5,\ deg(r_4)=4,\ deg(r_5)=3$

مجموعه درجه ها مساوی به 18 است و همانطور که انتظار داریم دو برابر تعداد یالهایش است.

برای سادگی در نمادگذاری، رأس های یک نقشه را با نقطه های کوچک نشان می دهیم یا فرض می کنیم که نقاط تقاطع خط ها یا منحنی در صفحه، رأس های نقشه هستند.

فرمول اویلر

اویلر ریاضی دان سویسی فرمولی ارایه داد که در آن ، ارتباط بین V تعداد رأس ها ، E تعداد یال ها و R تعداد ناحیه های هر نقشهٔ همبند بیان می شود. به ویژه این که:

$$V-E+R=2$$

ملاحظه می کنید که در شکل فوق V=6 ، E=9 و R=5 و همان گونه که از فرمول اویلر انتظار داریم:

$$V-E+R=6-9+5=2$$

تأکید می کنیم که گراف اصلی یک نقشه باید همبند باشد تا فرمول اویلر در مورد آن برقرار باشد.

فرض کنید G یک گراف چندگانهٔ مسطح و همبند با سه رأس و یا بیشتر باشد، از این رو G نه K_1 است و نه K_2 . فرض کنید M نمایش گراف مسطح G باشد. به آسانی دیده می شود که الف- ناحیهٔ M می تواند درجهٔ 1 داشته باشد تنها اگر مرز آن یک دور باشد. ب- ناحیهٔ M می تواند درجهٔ 2 داشته باشد تنها اگر مرز های آن شامل دو یال چندگانه باشد. بنابراین، اگر G گراف باشد و نه گراف چندگانه، آنگاه هر ناحیهٔ M باید درجهٔ 3 یا بیشتر داشته باشد. از این رو توضیح و فرمول اویلر برای اثبات نتیجهٔ زیر روی گراف های مسطح استفاده می شود.

قضیه : فرض کنید G یک گراف مسطح و همبند با p رأس و q یال باشد که در آن p≥3 است. آنگاه $q \leq 3p-6$.

توجه دارید که این قضیه برای K_1 که در آن p=1 و q=0، و نیز برای K_2 که در آن p=2 و q=1 است، برقرار نیست.

اثبات: فرض کنید r تعداد ناحیه های نمایش مسطح G باشد. بنا به فرمول اویلر:

$$p-q+r=2$$

حال نظر به یکی از قضایای گذشته که مجموع درجه های ناحیه ها برابر 2q است. اما هر ناحیه، درجهٔ 3 یا بیشتر دارد. از این رو:

$$2q\geq 3$$

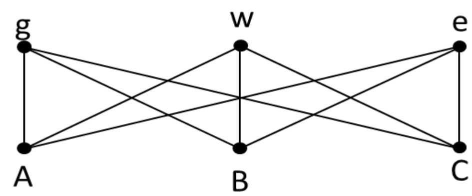
بنابراین: $r\leq\frac{2q}{3}$. با قرار دادن این عبارت در فرمول اویلر به دست می آید:

$$2\leq p-\frac{q}{3} \quad \text{یا} \quad 2=p-q+r\leq p-q+\frac{2q}{3} \quad \text{یا} \quad 2\leq p-\frac{q}{3}$$

با ضرب نامساوی اخیر در 3 به دست می آید 6≤3p-q که نامساوی مورد نظر را نتیجه می دهد.

گراف های غیرمسطح، قضیهٔ کوراتوفسکی

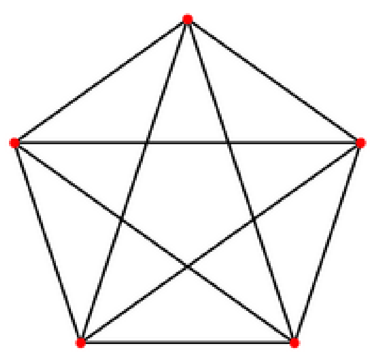
دو مثال مختلف از گراف های غیرمسطح ارایه می دهیم. ابتدا گراف سودمند را در نظر می گیریم یعنی می خواهیم سه خانهٔ A ، B و C را به لوله های گاز، آب و برق g ، w و b طبق شکل ذیل وصل کنیم، ملاحظه می کنیم که این گراف، گراف $K_{3,3}$ است که دارای p=6 رأس و q=9 یال است. فرض کنید که این گراف مسطح باشد. بنا به فرمول اویلر، نمایش مسطح این گراف، دارای r=5 ناحیه است. ملاحظه می کنید که هیچ یک از سه رأس ان به یکدیگر متصل نیستند، از این رو، درجهٔ هر ناحیه باید چهار و یا بیشتر از آن باشد و در نتیجه، مجموع دررجه های آن باید 20 و یا بیشتر باشد. بنا بر یکی از قضایای قبلی این گراف باید 10 یال یا بیشتر داشته باشد. به این ترتیب، این واقعیت که گراف $K_{3,3}$ ، 9 یال دارد نقض می شود. بنابراین گراف سودمند $K_{3,3}$ غیر مسطح است.



اکنون مثال دیگر ذیلاً در نظر بگیرید. این گراف، یک گراف کامل K_5 با p=5 رأس و q=10 یال است. اگر این گراف مسطح باشد، آنگاه بنا بر قضیهٔ گذشته :

$$10=q\leq 3p-6=15-6=9$$

که نادرست است. بنابراین K_5 غیرمسطح است.



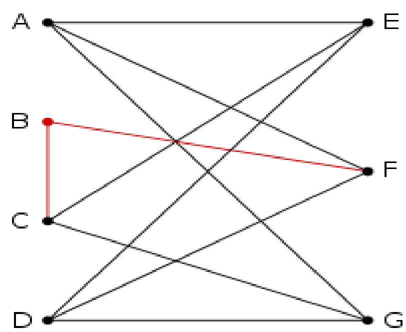
گراف کامل K_5

سال های زیادی است که ریاضی دانان در تلاش اند تا توصیفی از گراف های مسطح و غیر مسطح ارایه دهند. تا این که ، این مسأله در سال 1930 توسط ریاضی دان لهستانی به نام کوراتوفسکی حل شد.

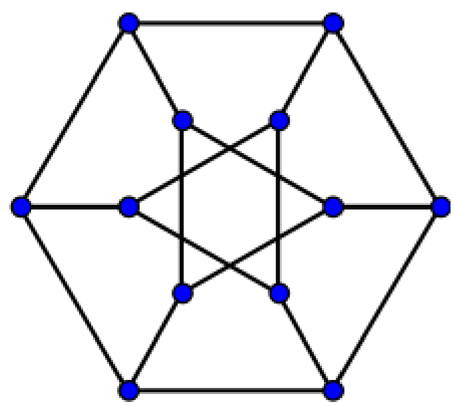
قضیهٔ کور اتوفسکی

یک گراف مسطح است اگر و فقط اگر زیرگرافی یکریخت با K_5 و $K_{3,\,3}$ نداشته باشد یا زیرگرافی یکریخت با زیرتقسیمی از $K_{3,\,3}$ و یا K_5 نداشته باشد. یا به عبارت دیگر یک گراف غیر مسطح است اگر و فقط اگر شامل یک زیرگراف همسانریخت با $K_{3,3}$ و یا K_5 باشد.

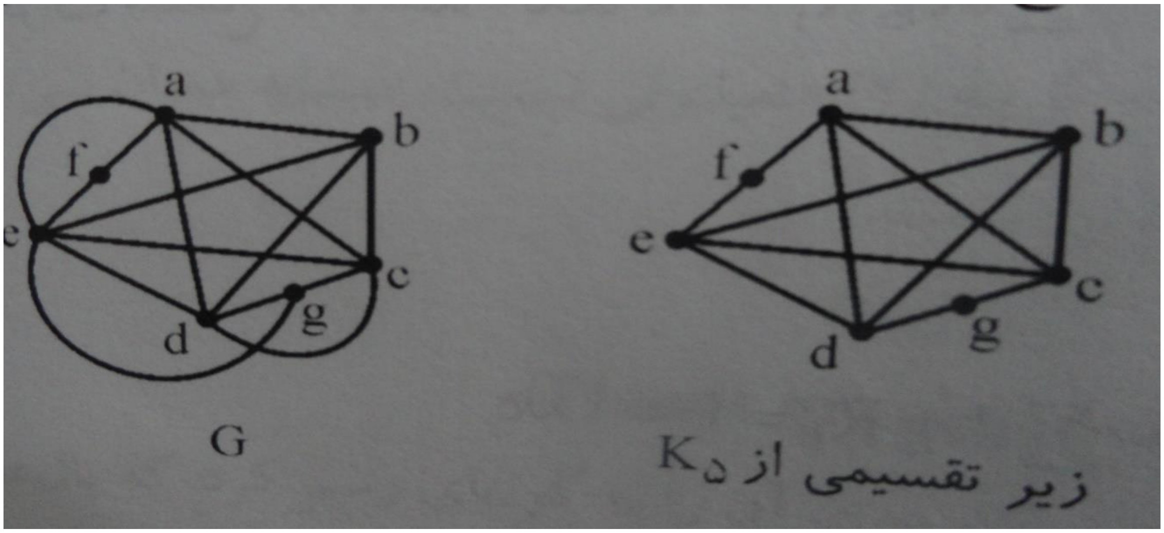
مثال 51: گراف ذیل زیرگرافی یک ریخت از $K_{3,\,3}$ را با خود دارد، بنابراین گراف مسطح نیست.



مثال 52: گراف زیر، گراف پیترسن بوده و زیرگرافی از $K_{3,\,3}$ را با خود دارد، بنابراین گراف مسطح نیست.



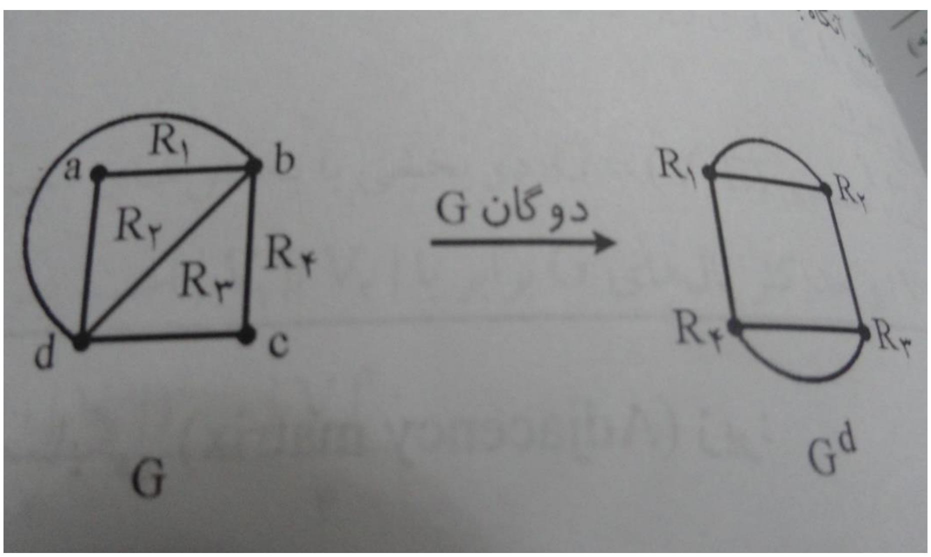
مثال 53: گراف ذیل نیز یک گراف نامسطح است، زیرا شامل زیرگراف یکریخت با زیرتقسیمی از گراف K_5 است.



گراف دوگان

فرض کنید یک گراف مسطح G طوری رسم شده است که هیچ یال آن به جز در راسهای ابتدایی و انتهایی همدیگر خود را قطع نمی کنند، ناحیه های آن را با R_i نمایش می دهیم. حال اگر گرافی را در نظر بگیریم که رأسهای آن نواحی R_i و به ازای هر یال مشترک بین دو ناحیه یک یال بین این دو رأس قرار دهیم. آنگاه به گراف حاصل ، گراف دوگان G گویند و به طور معمول آن را با G^d نمایش می دهند.

مثال 54:



ویژگی های گراف دوگان:

1) ممکن است دو گراف یکریخت دارای گراف های دوگان یکریخت نباشند.

2) درجهٔ هر رأس گراف دوگان برابر با تعداد یال های مرزی هر وجه ناحیه متناظر با آن رأس است.

3) یک رأس از درجهٔ یک در G ، یک طوقه در G^d به وجود می آورد و یک طوقه در G یک رأس از درجهٔ یک در G^d نتیجه می دهد.

رنگ آمیزی گراف ها

گراف G را در نظر بگیرید. رنگ آمیزی رأس یا به صورت ساده رنگ آمیزی گراف G، نسبت دادن رنگ هایی به رأس های گراف است به طوری که رأس های مجاور گراف، رنگ های مختلف داشته باشند. می گوییم گراف G ، n رنگ پذیر است اگر یک رنگ آمیزی از G وجود داشته باشد که از n رنگ استفاده کرده باشد. (از آنجا که کلمهٔ "color" هم به عنوان اسم به معنای رنگ و هم به عنوان فعل به معنای رنگ آمیزی کردن به کار می رود، از این رو به جای کلمه "color" برای رساندن مفهوم عمل نسبت دادن رنگ به رأس های گراف G از کلمهٔ "paint" به معنای رنگ زدن استفاده می کنم. حد اقل تعداد رنگ های مورد نیاز برای رنگ زدن گراف G ، عدد **فامی** G نامیده می شود و آن را با $\chi(G)$ نشان می دهند.

الگوریتم ذیل که توسط ولش(Welch) و پاول(Powell) ارایه شده است، برای رنگ آمیزی گراف G کاربرد دارد. تأکید می کنیم که این الگوریتم همیشه حداقل تعداد رنگ هایی را که برای رنگ آمیزی گراف G لازم است، به دست نمی دهد.

الگوریتم ولش – پاول

مرحلهٔ 1 : رأس های گراف G را برحسب نزول درجه ها مرتب کنید. (این ترتیب لزوماً منحصر به فرد نیست، زیرا بعضی از رأسها ممکن است درجات یکسان داشته باشند.)

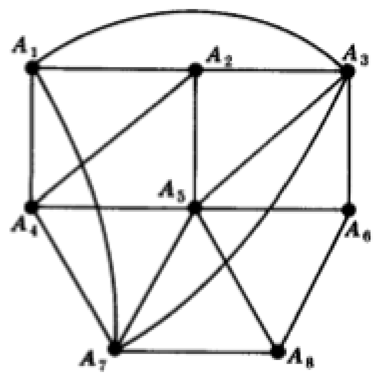
مرحلهٔ 2 : ابتدا رنگ C_1 را به اولین رأس و آنگاه به طور متوالی، رنگ C_1 را به رأسی نسبت دهید که مجاور رأس قبلی ای نیست که به آن C_1 نسبت داده شده است.

مرحلهٔ 3: مرحلهٔ 2 را لا رنگ دوم C_2 و رأس هایی که رنگ آمیزی نشده اند، تکرار کنید.

مرحلهٔ 4 : مرحلهٔ 3 را با رنگ سوم C_3 و آنگاه با رأس چهارم C_4 تکرار کنید و این فرایند را تا آنجا ادامه دهید که تمام رأس ها رنگ آمیزی شده باشند.

مرحلهٔ 5 : از الگوریتم خارج شوید.

مثال: الف – گراف G در شکل ذیل را در نظر بگیرید. و با استفاده از الگوریتم ولش – پاول، گراف G را رنگ می زنیم.



اگر رأس های گراف G را برحسب درجهٔ رأس ها به صورت نزولی مرتب کنیم، دنبالهٔ رأس های ذیل به دست می آید:

$$A_5, A_3, A_7, A_1, A_2, A_4, A_6, A_8$$

رنگ اول را به رأسهای A_5 و A_1 و رنگ دوم را به رأسهای A_3 و A_4 و A_8 نسبت می دهیم. رنگ سوم به رأس های A_7 ، A_2 و A_6 نسبت داده می شود. به تمام رأس ها، یک رنگ نسبت داده شده است و از این رو، گراف G ، 3- رنگ پذیر است. ملاحظه کنید که گراف G ، 2- رنگ پذیر نیست، زیرا رأس های A_1 ، A_2 و A_3 به یکدیگر متصل هستند، از این رو باید به آن ها رنگ های مختلف نسبت داده شود. بنابراین $\chi(G)=3$.

ب- گراف کامل K_n با n رأس را در نظر بگیرید. از آنجا که هر رأس این گراف مجاور هر رأس دیگر این گراف است، از این رو، K_n در هر رنگ پذیری به n رنگ احتیاج دارد. نبابراین $\chi(K_n)=n$

هیچ راه ساده ای وجود ندارد تا واقعاً تعیین کنیم که یک گراف دلخواه، n رنگ پذیر است یا خیر. با وجود این، قضیهٔ زیر، مشخصهٔ ساده ای از 2 – رنگ پذیر بودن گراف ها به دست می دهد.

قضیه : بیانیه های زیر برای یک گراف G ، هم ارز هستند:

الف- G ، 2 – رنگ پذیر است.

ب- G ، دوبخشی است.

ج- هر دور گراف G ، طول زوج دارد.

هیچ محدودیتی روی تعداد رنگ هایی که ممکن است برای رنگ آمیزی یک گراف دلخواه مورد نیاز باشد، وجود ندارد، برای مثال، گراف کامل K_n ، به n رنگ احتیاج دارد. با وجود این، اگر خود را به گراف های مسطح محدود کنیم، طرفنظر از تعداد رأسها، برای رنگ آمیزی آن ها، پنج رنگ کفایت می کند.

قضیه: هر گراف مسطح 5 رنگ پذیر است.

در واقع ریاضی دانان از نیمهٔ اول دههٔ 1850 حدس زده اند که گراف های مسطح 4 – رنگ پذیرند، زیرا هر گراف مسطح شناخته شده 4 رنگ پذیر است. سرانجام در سال 1976 ، اپل(Appel) و هیکن(Haken) ثابت کرده اند که این حدس درست است، یعنی :

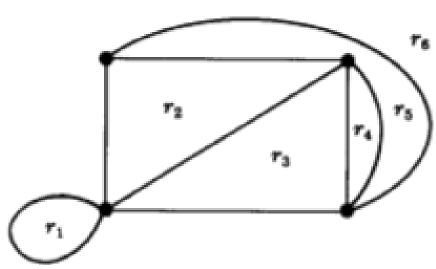
قضیهٔ چهار رنگ (قضیهٔ اپل و هیکن): هر گراف مسطح، 4 – رنگ پذیر است. در بخش بعد این قضیه بحث و بررسی می شود.

نقشه های دوگان و قضیهٔ چهار رنگ

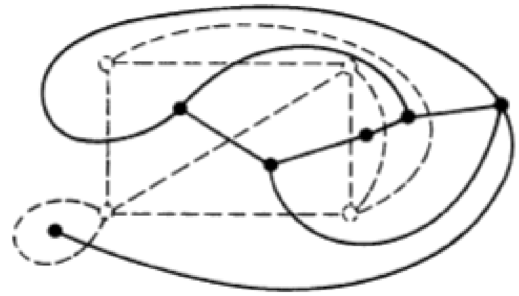
نقشهٔ M ، به طور مثال نقشهٔ M را در شکل ذیل در نظر بگیرید. به بیان دیگر M ، نمایش مسطح گراف چندگانهٔ مسطح است. دو ناحیه از M را مجاور گویند اگر یک یال مشترک داشته باشند. نبابراین، ناحیه های r_2 و r_5 در شکل ذیل – الف، مجاور هستند. اما ناحیه های r_3 و r_5 مجاور نیستند. منظور از **رنگ پذیری** یک نقشهٔ M نسبت دهی رنگ ها به ناحیه هایی از M است به طوری که ناحیه های مجاور، رنگ های مختلف داشته باشند. نقشهٔ M ، n – رنگ پذیر است اگر یک رنگ پذیری از M وجود داشته باشد که از n رنگ استفاده کند. بنابراین ، نقشهٔ M در شکل ذیل – الف، 3 – رنگ پذیر است، زیرا به ناحیه های آن می توان به صورت زیر، رنگ ها را نسبت داد.

r_1 قرمز، r_2 سفید، r_3 قرمز، r_4 سفید، r_5 قرمز، r_6 آبی

به شباهت بین این بحث روی رنگ آمیزی نقشه ها و بحث قبل روی رنگ آمیزی گراف ها توجه کنید. در حقیقت با استفاده از مفهوم نقشهٔ دوگان که در ذیل تعریف شده است می توان نشان داد که رنگ آمیزی یک نقشه هم ارز با رنگ آمیزی رأس یک گراف مسطح است.



(الف)



(ب).

نقشهٔ M را در نظر بگیرید. در هر ناحیهٔ M ، یک نقطه را انتخاب می کنیم و اگر دو ناحیه یک یال مشترک داشته باشند، آنگاه نقاط متناظر یک منحنی را از طریق یال مشترک به هم متصل می کنیم. این منحنی را طوری می توان رسم کرد که یک دیگر را قطع نکنند. به این ترتیب، نقشهٔ جدید M^* به دست می آید که **دوگان** M نامیده می شود به طوری که هررأس M^* دقیقاً متناظر با یک ناحیهٔ M است. در شکل فوق – ب، دوگان نقشهٔ شکل – الف نشان داده شده است. می توان ثابت کرد که هر ناحیهٔ M^* دقیقاً شامل یک رأس M است و هر یال M^* دقیقاً یک یال M را قطع می کند و برعکس. بنابراین، M ، دوگان نقشهٔ M^* است.

ملاحظه می کنید که هر رنگ آمیزی ناحیه های نقشهٔ M ، متناظر با رنگ آمیزی رأس های نقشهٔ دوگان M^* است. بنابراین نقشهٔ M ، n – رنگ پذیر است اگر و فقط اگر گراف مسطح نقشهٔ دوگان M^* ، n رنگ پذیر باشد. به این ترتیب قضیهٔ بالا را می توان به صورت زیر بیان کرد.

قضیهٔ چهار رنگ (قضیهٔ اپل و هیکن)

اگر ناحیه های مختلف نقشهٔ M طوری رنگ شوند که ناحیه های مجاور آن، رنگ های مختلف داشته باشند، انگاه به بیشتر از چهار رنگ احتیاج نیست.

اثبات قضیهٔ بالا با استفاده از کمپیوتر های مختلف ، به صورت اساسی انجام شده است. به ویژه این که ، اپل و هیکن نشان دادند که اگر قضیهٔ چهار رنگ نادرست باشد، آنگاه باید در میان یکی از تقریباً 2000 نوع گراف مسطح مختلف، یک مثال نقض وجود داشته باشد. این افراد با استفاده از کمپیوتر نشان دادند که هیچ یک از این انواع مختلف از گراف ها دارای مثال نقض مورد نظر نیست. عمر بشر برای بررسی هر نوع مختلف از گراف بدون استفاده از کمپیوتر کفایت نمی کند. بنابراین، برخلاف بیشتر اثبات های ریاضی، اثبات قضیهٔ چهار رنگ وابسته به تکنولوژی است یعنی بستگی به طراحی کمپیوتر های بسیار سریع دارد.

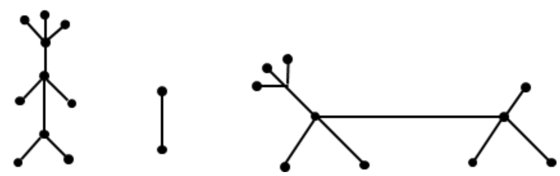
فصل دوم

درخت ها (Trees)

اكنون نوعي ازگراف هارابررسي مي كنيم كه درخت ناميده مي شوند. ابتدا تعريف زيررابيان مي كنيم.

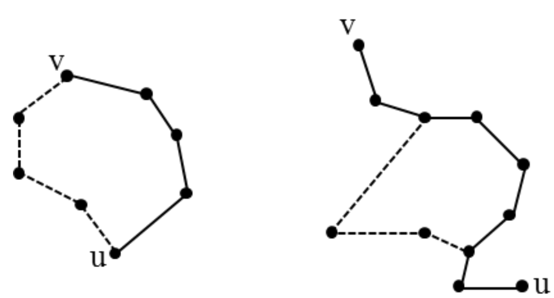
تعريف: درخت يك گراف همبند است كه هيچ دوري نداشته باشد.

نمودارهاي زيردرخت هستند.



چون يك درخت همبند است، حداقل يك مسير بين هردو رأس آن وجود دارد.

فرض كنيم دورأس در درخت وجود داشته باشند كه به وسيله دومسير به هم متصل باشند. دراين صورت ايندو مسير تشكيل يك دور مي دهند كه شامل تمام يالها ي اين دو مسير است، يا فقط شامل بعضي ازآنها است.



اما اين متناقض با تعريف درخت است. لذا چنين دومسيري وجود ندارد. درنتيجه قضيه زير راداريم.

قضيه: درهردرخت بين هردو رأس دقيقاً يك مسير وجود دارد.

بلافاصله از اين قضيه مي توانيم استفاده كنيم و تعداد كل مسيرها را در يك درخت محاسبه كنيم.

فرض كنيم درختي داراي n رأس باشد. چون بين هر دو رأس آن دقيقاً يك مسير وجود دارد لذا هر رأس كه انتخاب كنيم بين آن و n-1 رأس ديگر دقيقاً n-1 مسير وجود دارد. چون n رأس داريم پس n(n-1) مسير وجود دارد كه هر مسير دوبار به حساب آمده است لذا تعداد مسيرها $\frac{n(n-1)}{2}$است. به طريق ديگر نيز قابل

محاسبه است. انتخاب 2 رأس از n رأس راداريم لذا تعداد مسير ها $\binom{n}{2}$ است كه همان تعداد قبلي است.
بنابراين:

در هردرخت ازمرتبه n تعداد كل مسير ها $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ است.

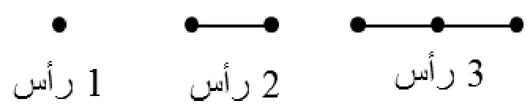
مثال 1 : دريك درخت تعداد كل مسير ها 190 است اين درخت چند رأس دارد.

حل : فرض كنيم اين درخت n رأس داشته باشد لذا تعداد كل مسير ها $\frac{n(n-1)}{2}$ است درنتيجه؛

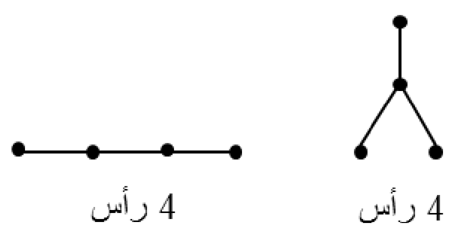
$$\frac{n(n-1)}{2}=190 \Rightarrow n(n-1) = 380 = 20 \text{ X } 19 \Rightarrow n = 20$$

مثال 2 : چند درخت بدون برچسب(غير يكريخت) با 5 رأس و كمتر وجود دارد؟ نمودار هاي آنها رارسم كنيد.

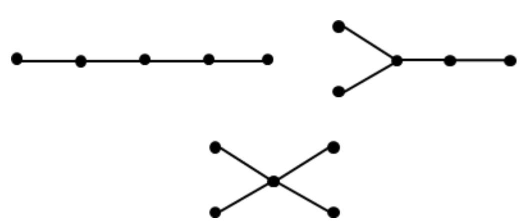
حل : 8 درخت ازمرتبه 1،2،3،4 و 5 بدون برچسب يا غير يكريخت وجود دارد. نمودار هاي آنها به صورت زير است.



دو درخت غير يكريخت از درجه 4 وجود دارد.



سه درخت غير يكريخت با 5 رأس وجود دارد كه به صورت زير مي باشند.



با رسم هردرخت مشاهده ميكنيم كه هر درخت كه بيش از يك رأس داشته باشد حداقل يك رأس از درجه يك دارد.

حتي هردرخت با بيش از يك رأس حداقل دورأس از درجه يك دارد. ابتدا قضيه زيررا داريم:

قضيه: هردرخت با بيش از يك رأس حد اقل يك رأس از درجه يك دارد.

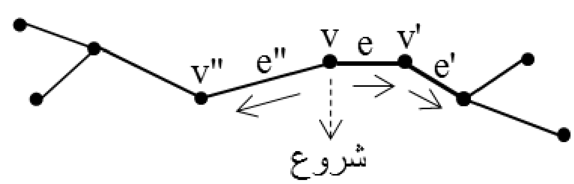
اثبات: چون اين درخت حد اقل دو رأس دارد. پس اگر رأس v را انتخاب كنيم يك يال e از v گذشته است.

اگر يال ديگري از v نگذشته باشد كه اثبات تمام است و v ازدرجه يك است درغير اين صورت deg(v)>1 ولذا يال ديگر مانند e′ كه e′≠ e از v گذشته است.
فرض كنيم v′ انتهاي ديگرe′ باشد(واضح است كه v′≠ v) اگر از v′ يال ديگري غير ازe′ نگذشته باشد كه v′ از درجه يك واثبات تمام است درغير اين صورت مانند مرحله قبلي ادامه مي يابد. چون تعداد رأس ها متناهي است ودرخت گرافي فاقد دوراست. پس در آخرين مرحله رأسي ازدرجه يك باقي مي ماند.

ميتوان قضيه فوق راتعميم داده وقضيه كلي تر زير رانتيجه گرفت.

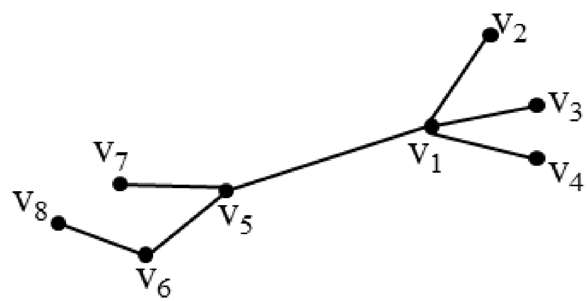
قضيه: هردرختي كه بيش از يك رأس داشته باشد حداقل دو رأس از درجه يك دارد.

درقضيه قبل از رأسي چون v شروع كرديم ونشان داديم حد اقل يك رأس از درجه يك وجود دارد. اكنون دوباره به راس v برمي گرديم اگر خود v از درجه يك باشد كه اثبات تمام است درغير اين صورت مانند حالت قبل مسير ديگري را از يالي مانند e″ كه آن نيز از v گذشته و $e″ \neq e$ شروع مي كنيم با به كاربردن روش قضيه قبل درانتها به رأسي از درجه يك مي رسيم. لذاحد اقل دورأس از درجه يك داريم.



ياداشت: قضيه فوق را به استقراي تعميم يافته نيز مي توان ثابت كرد.

تعريف: فرض كنيم T يك درخت باشد، هر رأس از درجه يك را در T يك رأس نهائي (terminal) وهر رأس از درجه بيشتر از يك را يك رأس داخلی (internal) يا يك رأس شاخه اي مي ناميم.



درنموداردرخت فوق رأس هاي v_1، v_5وv_6 رأس ها داخلي و رأس هاي v_2، v_3، v_4، v_7 و v_8 رأس هاي نهائي يا پاياني هستند. مهمترين قضيه دردرخت ها قضيه زيراست.

قضيه: اگر T درختي با n رأس و q يال باشد آنگاه $q=n-1$.

يعني در هر درخت تعداد يالها همواره ازتعداد رأس ها يكي كمتر است.

اثبات به كمك قضيه قبل و با استفاده ازاستقراء روي n صورت مي گيرد. اگر $n=1$ كه $q=0$ و ثابت است. فرض كنيم قضيه در هر درخت با k رأس كه $k\geq 1$ صحيح باشد. حال اگر درخت T را كه $k+1$ رأس دارد درنظر بگيريم بنابر قضيه قبل يك رأس با درجه 1 درآن وجود دارد با حذف آن به درخت T' از مرتبهK مي رسيم كه طبق فرض استقراء داراي$k-1$ يال است. لذا درخت T كه با اضافه كردن يك رأس ويك يال از T' بدست مي آيد، $K+1$ رأس و K يال دارد.

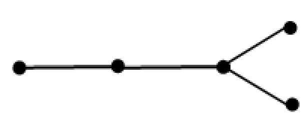
مثال 3

1- گراف G داراي 10 رأس و 11 يال است. آيا اين گراف حتماً يك درخت است؟

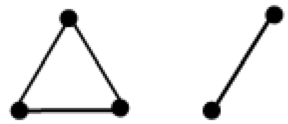
2- گراف G' دارای 5 رأس و 4 يال است. آيا اين گراف حتماً درخت است؟

حل : (1) نمي تواند يك درخت باشد زيرا 10 رأس دارد پس بايد 9 يال داشت باشد.

G'(2) نيز همواره نمي تواند يك درخت باشد. ممكن است هم باشد. گرافي با 5 رأس و 4 يال كه درخت است:



گراف با 5 رأس و 4 يال كه درخت نمي باشد:



ياداشت : عكس قضيه قبل همواره صحيح نمي باشد. يعني ممكن است گرافي داراي n رأس و n-1 يال باشد اما درخت نباشد. درقضيه زير شرطي به مفروضات اضافه شده و لذا قضيه اي بدست مي آيد كه با تعديلي مي تواند عكس قضيه قبلي باشد. توجه داشته باشد كه كاملاً عكس آن نيست.

قضيه: اگر G گرافي همبند با n رأس و n-1 يال باشد آنگاه G يك درخت است.

مشاهده مي كنيم كه با اضافه كردن شرط همبندي عكس قضيه صحيح مي شود.

مثال 4 : در يك درخت ازمرتبه n مجموع درجه رأس ها چند است؟

حل : مانند آنچه درگراف و درحالت كلي ثابت شد چون درخت نيز يك نوع گراف ساده است لذا مجموع درجه رأس ها دو برابر تعداد يال ها است. يعني برابر 2(n-1) است.

درهردرخت با n رأس مجموع درجه رأس ها برابر 2(n-1) است.

$$\sum_{i=1}^{n} vi = 2(n-1)$$

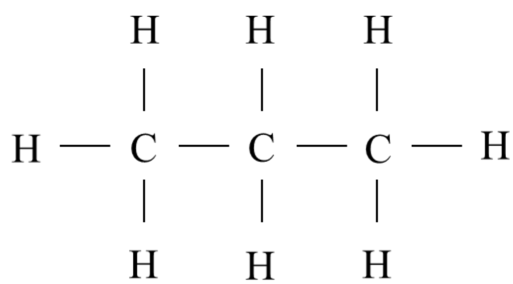
مثال 5 : فرض كنيم G گرافي باشد از يك مولكول هايدروژن با ماكسيمم اتم هاي هايدروجن براي هراتم كاربن:

(1) گراف G رارسم كنيد كه داراي 3 اتم كاربن و 8 اتم هايدروجن باشد.

(2) اگر گراف G شامل k اتم كاربن و m اتم هايدروجن باشد آنگاه مجموع درجه هاي G كدام است؟

حل:

(1) G يك درخت است. مجموع درجه ها = $3\times4+8=20$



(2) مي توان ازقسمت قبل الهام گرفته ومجموع درجه ها را در گراف G كه شامل k اتم كاربن و m اتم هايدروجن است محاسبه كرد. حاصل برابر 4K+m است.

چون به ازاي هر اتم كاربن ماكسيمم اتم هاي هايدروجن به كار رفته است پس به هراتم كاربن 4 اتم ديگر متصل است.

از طرفی هر اتم هیدروژن دقیقاً به یک اتم کاربن کاربن متصل است. زیرا در غیر این صورت گراف همبند نمی باشد.

لذا k اتم كاربن داريم كه هر يك از درجه 4 و m اتم هايدروجن داريم كه درجه هريك، يك است. لذا تعداد 4K+m است.

مثال 6 : كدام يك از بيانيه هاي زير درست و كدام نادرست است؟

1- اگر از يك درخت يك يال برداريم آنگاه درخت ناهمبند مي شود.

2- اگر در يك گراف مرتبه n و اندازه q داشته باشيم q<n-1 آنگاه گراف نا همبند است($n \geq 2$).

3- هرگاه درگراف همبند G با n رأس و q يال يعني اندازه q، يك رأس از درجه q باشد آنگاه اين گراف درخت است.

4- اگر G گرافي با n رأس وn-1 يال باشد آنگاه G درخت است.

حل : (1) صحيح است. چونG درخت است پس بين هردو رأس آن دقيقاً يك مسير وجود دارد. فرض كنيم يالي كه حذف كرده ايم متعلق به مسيري با انتهاي u وv باشد در اين صورت مسير ديگري بين u وv باقي نمي ماند ولذا گراف ناهمبند مي شود.

(2) صحيح است. وقتي گرافي n رأس داشته باشد وهمبند باشد چون تمام رأس ها به وسيله يالي بهم متصل اند پس لااقل n-1 يال لازم است تا اين n رأس رابهم متصل كند. لذا اگر تعداد يالها ازn-1 كمتر شود گراف نا همبند است.

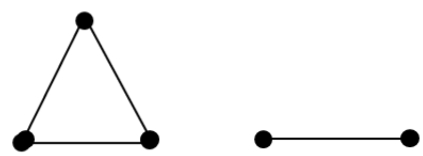
(3) صحيح است. دراين گراف هيچ رأس ديگري ازدرجه بيشتر از يك نمی تواند باشد. فرض كنيم يك رأس درجه دوم داشته باشيم دراين صورت مجموع درجه رأس ها برابر1 ×(n-2)+q+2 يا برابر q+n

است. اما مجموع درجه رأس ها در گراف 2q است پس q+n=2q یا q=n اما این غیر ممکن است زیرا درجه هر رأس درگراف حد اکثرn-1 است.

لذا دراین گراف اگر يك رأس ازدرجه q باشدn-1 رأس ديگر از درجه يك است پس 2q=q+(n-1) یاq=n-1 وچون G همبند است پس G درخت است.

(4) صحيح نمي باشد. اگرG همبند باشد صحيح است.

به مثال زير توجه كنيد.



با استفاده ازقسمت (2) درمثال قبل مي توان نتيجه گرفت كه دربين گراف هاي همبند درخت ها كمترين يال را دارند. زيرا وقتي گراف همبندي n رأس داشته باشد لااقلn-1 يال لازم است كه تمام رأس ها بهم متصل شوند ودراين صورت G يك درخت است.همچنين مي دانيم وقتي تمام يالهاي بين رأس ها در يك گراف رسم شده باشند گراف كامل وبيشترين تعداد يالها را دارد. پس نتيجه زيررا داريم:

درهرگراف همبند $\frac{n(n-1)}{2} \geq q \geq$n-1 يعني دربين گراف هاي همبند مرتبه n ، درخت ها كمترين و گراف هاي كامل بيشترين يال را دارند.

مثال 7 : گراف همبندي داراي 12 رأس است. اين گراف حداقل و حداكثر چند يال دارد؟

حل : وقتي حداقل يال را دارد كه درخت باشد پس q=n-1=12-1=11 وقتي حداكثر يال را دارد كه كامل باشد پس حدا كثر تعداد يالها $66=\frac{12(12-1)}{2}$ است لذا $11 \leq q \leq 66$.

مثال 8 : در يك درخت مجموع تعداد يالها و رأس ها 23 است. اين درخت چند يال دارد؟

حل :

$$\begin{cases} \mathrm{n} + \mathrm{q} = 23 \\ \mathrm{q} = \mathrm{n} - 1 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{q} + 1 + \mathrm{q} = 23 \Rightarrow 2\mathrm{q} = 22 \Rightarrow \mathrm{q} = 11$$

مثال 9 : در يك درخت ماكسيمم درجه رأس ها برابر 3 است اگر اين درخت 4 رأس با درجه ماكسيمم و 3 رأس از درجه 2 داشته باشد، تعداد رأس هاي اين درخت چند است.

حل : چون درخت رأس از درجه صفر ندارد پس بقيه رأس هاي اين درخت بايد از درجه يك باشند و حداقل بايد دو رأس درجه 1 داشته باشد. فرض كنيم m تعداد رأس هاي درجه يك باشند.

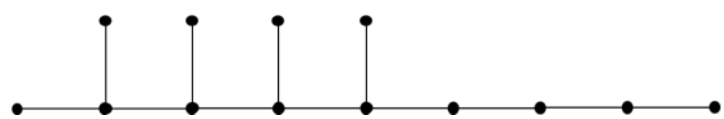
$$(3,3,3,3,2,2,2,\underbrace{1,1,\ldots,1}_{m})$$

$$\sum deg(vi) = 12 + 6 + m = 18 + m = 2q$$

تعداد رأس هاي اين درخت برحسب m برابر 7+m است. پس تعداد يالها m+6 است درنتيجه:

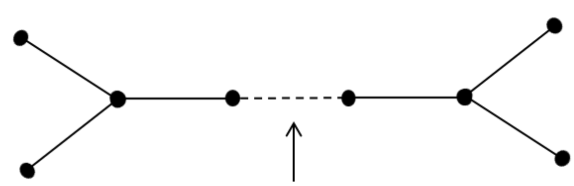
$$18+m=2(m+6) \Rightarrow m = 6$$

لذا تعداد رأس هاي اين درخت 13 است.نموداري از اين درخت رسم شده است.



برداشتن يال از درخت

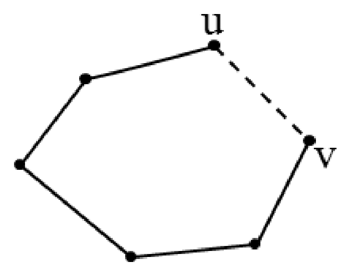
چنانچه ثابت كرديم در هر درخت بين هردو رأس دقيقاً يك مسير وجود دارد پس اگر دو رأس مجاور يك درخت رادرنظر بگيريم بين اين دو رأس مجاور نيز فقط يك مسير وجود دارد كه همان يال بين آن دو است، بنا براين اگر اين يال برداشته شود، مسيري بين اين دو رأس وجود ندارد و درنتيجه درخت ناهمبند مي شود. يعني به گرافي ناهمبند تبديل مي شود.



بنابراين باحذف يك يال در درخت اين درخت فقط به دو مؤلفه تجزيه مي شود.

به همين ترتيب چون در درخت هر دو رأس v و u به وسيله يك مسير بهم متصل اند پس بااضافه كردن يال uv يك دور پديد مي آيد. دوري كه شامل آن مسير و يال اضافي uv است بنابراين:

درهر درخت با متصل كردن دو رأس به يكديگر يك دور پديد مي ايد. به عبارت ديگر با اضافه كردن يك يال جديد به درخت يك دور پديد مي آيد وبيش ازيك دور پديد نمي آيد.



باتوجه به ویژگي هاي درخت مي توانیم درخت را به صورت هاي مختلفي تعریف کنیم. درزیرقضیه اي را بیان مي کنیم که شش تعریف معادل را مي تواند براي درخت بیان کند. هریك را که به عنوان تعریف بپذیریم
مي توانیم پنج بیانیه دیگر رابه وسیله آن ثابت کنیم.

قضیه: تعریف هاي معادل براي درخت

فرض کنیم T یك درخت با n رأس باشد دراین صورت هریك ازبیانیه هاي زیر معادل دیگري است.

1- T همبند است وهیچ دوري ندارد.

2- T داراي n-1 یال است وهیچ دوري ندارد.

T-3 همبند است و n-1 یال دارد.

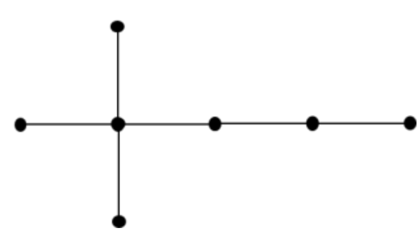
4 - Tهمبند است و با حذف هر یال T ناهمبند مي شود.

5- هر دو رأسT دقیقاً به وسیله یك مسیر به هم متصلند.

6- T شامل دوري نمي باشد، اما با اضافه کردن هریال جدید یك دور پدید مي آید.

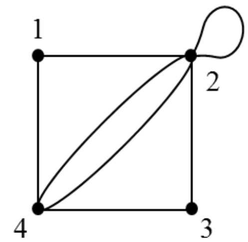
مثال 10 : یك درخت داراي 7 رأس است اگر دقیقاً 4 رأس از درجه یك داشته باشد در این صورت دنباله درجه رأس هاي آن کدام است؟

حل : این درخت باید نموداري به صورت زیر داشته باشد. پس باید یك رأس از درجه چهار و دو رأس از درجه دو داشته باشد. درنتیجه، دنباله گرافي (1،1،1،1،2،2،4) را دارد.



ماتريس مجاورت (Matrix of adjacency)

ابتدا مثال هاي زير را درنظر مي گيريم.



$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix}1&2&3&4\\ \downarrow&\downarrow&\downarrow&\downarrow\end{matrix} \\ \begin{matrix}1\longrightarrow\\2\longrightarrow\\3\longrightarrow\\4\longrightarrow\end{matrix} & \begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&1&1&2\\0&1&0&1\\1&2&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

درسمت چپ يك گراف برچسب دار ازمرتبه 4 و درسمت راست يك ماتريس با 4 سطر و 4 ستون داريم، يعني يك ماتريس 4×4 داريم.

اعدادي را كه در ماتريس مشاهده مي كنيد يعني درايه هاي ماتريس، به تعداد يالهايي كه دو رأس نظير را درگراف بهم متصل ميكنند مربوط است. به طور مثال رأس 1 و 2 به وسيله يك يال بهم متصل اند لذا درايه واقع در سطر اول و ستون دوم وهمچنين درايه واقع درسطر دوم وستون اول برابر 1 است.

رأس هاي 2 و 4 به وسيله دويال بهم متصل اند، لذا:

درايه واقع در سطر دوم و ستون چهارم و همچنين درايه واقع درسطر چهارم و ستون دوم برابر 2 است.

رأس ها 1 و3 با هيچ يالي بهم متصل نيستند، لذا: درايه واقع در سطر اول وستون سوم و همچنين درايه واقع درسطر سوم و ستون اول برابر صفراست.

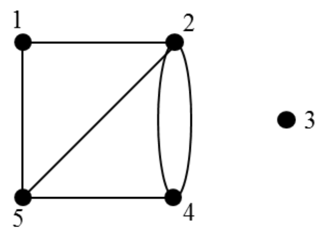
رأس 2 به خودش متصل است يعني 2 طوقه است بنابراين:

درايه واقع درسطر دوم وستون دوم برابر 1 است.

بنابر آنچه در مثال فوق مشاهده كرديم مي توانيم به هر گراف ماتريسي را به نوعي نظير كنيم لذا، تعريف زير راداريم:

تعريف: فرض كنيم G گرافي با n رأس باشد كه با اعداد1،2،3،...،n برچسب گذاري شده باشند. ماتريس مجاورت$A(G)$ متناظر G يك ماتريس $n\times n$ است كه a_{ij} يعني درايه واقع در سطر i ام ستون jام آن تعداد يالهايي باشد كه رأس هاي i و j را بهم متصل مي كند.

مثال 11 : درگراف زير ماتريس مجاورت رابنويسيد.



حل : این گراف ساده نمي باشد و داراي 5 رأس است پس ماتریس مجاورت آن يك ماتریس 5×5 به صورت زیر مي باشد.

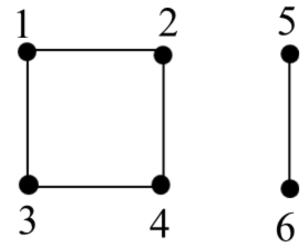
$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال 12 : ماتریس زیر ماتریس مجاورت يك گراف است نمودار این گراف رارسم کنید.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

حل : از درایه هاي ماتریس که 0 یا 1 مي باشند نتیجه مي گیریم که گراف متناظرآن يك گراف ساده است.

این گراف به صورت زیر است:



باتوجه به چند مثالي كه درفوق بررسي كرديم مي توان گفت ماتريس مجاورت هرگراف داراي ويژگي هاي زير مي باشد.

ويژگي هاي ماتريس مجاورت گراف

1- ماتريس مجاورت يك گراف يك ماتريس مربعي است كه مرتبه آن برابر مرتبه گراف است.

2- اگر گراف داراي طوقه نباشد تمام درايه هاي روي قطر اصلي آن صفر است.(هيچ يالي ازآن رأس به خودش متصل نمي باشد)

3- ماتريس مجاورت هرگراف(غير جهت دار) يك ماتريس متقارن است يعني $a_{ij}= a_{ji}$.

زيرا يالي كه از رأس v_i به رأس v_j متصل است همان يالي است كه از رأس v_j به رأس vi متصل مي باشد.

4 - اگر گراف G ساده باشد تمام درايه هاي ماتريس مجاورت برابر 0 يا 1 است.

5- مجموع درايه هاي روي يك سطر يا ستون i ام برابر درجه رأس v_i است.

يعني مجموع درايه هاي روي يك سطر يا ستون برابر درجه رأس متناظر آن سطر يا ستون است.

6- اگر G يك گراف ساده و A ماتريس مجاورت آن باشد آنگاه درايه واقع در سطر i ام و ستون i ام ، A^2 برابر درجه رأس v_i ازگراف است.

زيرا درايه a_{ii} در ماتريس A^2 از ضرب سطر i ام A در ستون i ام A پديد مي آيد كه ضرب اسكالر يك بردار در خودش مي باشد و لذا برابر $C_1^2+ C_2^2 +…+C_n^2$ است، در واقع يك ماتريس سطري در ترانهاده اش ضرب مي شود كه يك ماتريس ستوني است. اما چون گراف ساده است هرC_i برابر يك يا

صفر است لذا

$C_i^2 = C_i$ درنتيجه؛

$$C_1^2 + C_2^2 + \cdots + C_n^2 = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$$

لذا اين حاصل برابر همان جمع درايه هاي سطر يا ستون i ام است كه برابر درجه رأس v_i از گراف است.

توجه داريم كه اين ويژگي فقط در گراف ساده صحيح است. كه هر C_i برابر 1 يا صفر است و در گراف غير ساده همواره صحيح نمي باشد.

همچنين نتيجه مي شود كه در اين حالت مجموع درايه هاي روي قطر اصلي ماتريس A^2 برابر مجموع درجه هاي رأس ها يا دو برابر تعداد يالها درگراف ساده است.

7- اگر G يك گراف و A ماتريس مجاورت آن باشد آنگاه مجموع تمام درايه هاي ماتريس A برابر مجموع درجه رأس هاي G يعني دوبرابر تعداد يالها است.

زيرا بنابر ويژگي (5) مجموع درايه هاي روي هرسطر يا ستون برابر درجه نظير آن رأس است. پس مجموع درايه ها چه سطري جمع شوند و چه ستوني برابر مجموع درجه هاي رأس ها مي باشند.

مثال 13 : ماتريس مجاورت يك گراف با توجه به برچسب رأس هاي آن نوشته شده است.

1- آيا گراف ساده است؟

2- درجه رأس هاي b وd كدام اند؟

3- تعداد يالهاي اين گراف چند است؟

4- نمودار گراف نظير رازسم كنيد.

5- درايه هاي روي قطر اصلي ماتريسA^2 كدام اند؟

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

حل:

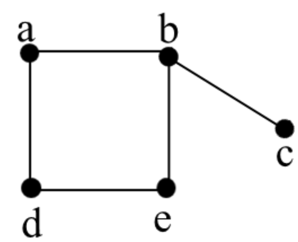
1- چون تمام درايه ها 0 يا 1 هستند و تمام درايه هاي روي قطر اصلي نيز صفر اند پس گراف طوقه و يال موازي ندارد لذا سا ده است.

2- رأسb از درجه 3 است زيرا b بالاي ستون دوم يا كنار سطر دوم است و مجموع درايه هاي سطر دوم يا ستون دوم برابر 3 است. به همين ترتيب رأس d از درجه دوم است.

3- براي تعيين تعداد يالها ابتدا مجموع تمام درايه هاي ماتريس را پيدا مي كنيم كه برابر مجموع درجه رأس ها يا دوبرابر تعداد يالها است.
مي توانيم مجموع درايه هاي سطر ها را باهم جمع كنيم يا مجموع درايه هاي ستون ها را باهم جمع كنيم تفاوتي ندارد زيرا ماتريس مجاورت متقارن است.

دراينجا چون گراف ساده است مجموع يك ها رامحاسبه مي كنيم.
مجموع يك ها برابر 10 است لذا مجموع درجه رأس ها برابر 10 ودر نتيجه تعداد يالهاي اين گراف برابر5 است.

4 - نمودار اين گراف به سادگي قابل رسم است. ابتدا پنج رأس a، b، c، d، e را مشخص مي كنيم.



چون گراف ساده است طوقه ويال هاي موازي نداريم با توجه به ماتريس فوق از رأس a يالهايي به b و d متصل است زيرا درايه هاي نظير1 مي باشند. مثلاً از a به e و يا c يالي متصل نمي باشد زيرا درايه هاي نظير صفر اند. به همين ترتيب ساير يالها رسم مي شوند.

5- مي توانيم بدون محاسبه A^2 درايه هاي روي قطر اصلي آن را پيدا كينم. زيرا گراف ساده است واين درايه ها برابر مجموع درجه رأس ها مي باشد. لذا اگر هر درايه ماتريس A^2 به صورت C_{ij} باشد آنگاه:

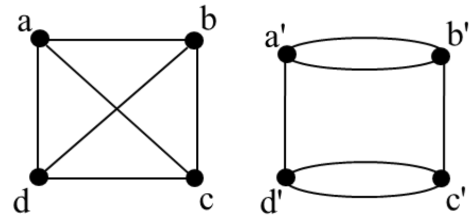
$C_{11}=deg(a)=2$ $\qquad$ $C_{22}=deg(b)=3$

$C_{33}=deg(c)=1$ $\qquad$ $C_{44}=deg(d)=2$

$C_{55}=deg(e)=2$

8- شرط لازم و كافي براي آن كه گراف G، r- منتظم باشد آن است كه مجموع تمام درايه هاي روي هر سطر و ستون ماتريس مجاورت آن برابر r باشد.

مثال 14 : دريك گراف ازمرتبه 4 كه 3 ـ منتظم است ماتريس مجاورت را بنويسيد.



G_1 G_2

حل : دو نمونه گراف مرتبه 4 و3- منتظم رسم شده است G_1 گرافي ساده است اما G_2 ساده نمي باشد ماتريس هاي مجاورت آنها رادرزير مشاهده مي كنيد.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a & b & c & d \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} a' & b' & c' & d' \end{array} \\ \begin{array}{c} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

9- شرط لازم و كافي براي آن كه گراف G كامل باشد آن است كه تمام درايه هاي ماتريس مجاورت آن به جز درايه هاي روي قطر اصلي 1 و درايه هاي روي قطر اصلي صفرباشند.

زيرا گراف كامل ساده است يعني يال موازي و طوقه ندارد پس هيچ درايه بزرگتر از 1 وجود ندارد و بين هررأس و خودش يالي نداريم لذا هر درايه روي قطر اصلي صفراست.

مثال 15 : اگر A ماتريس مجاورت گراف كامل K_n باشد آنگاه ماتريس A^2 رامحاسبه كنيد. هر درايه روي قطر اصلي چند است؟ همچنين مجموع درايه هاي ماتريس A^2 رامحاسبه كنيد.

حل : فرض كنيم A ماتريس مجاورت گراف كامل K_n باشد دراين صورت A يك ماتريس $n\times n$ به صورت زير است كه به جز درايه هاي روي قطر اصلي كه صفر اند بقيه درايه ها برابر يك مي باشد.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots\dots & 1 \\ 2 & 1 & 0 & \dots\dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots\dots & 0 \end{bmatrix}$$

چون A ازمرتبه n است پس A^2به صورت ذيل است:

$$A^2=\begin{bmatrix} n-1 & n-2 & n-2 & \dots\dots & n-2 \\ n-2 & n-1 & n-2 & \dots\dots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n-2 & n-2 & \dots\dots\dots\dots & & n-1 \end{bmatrix}$$

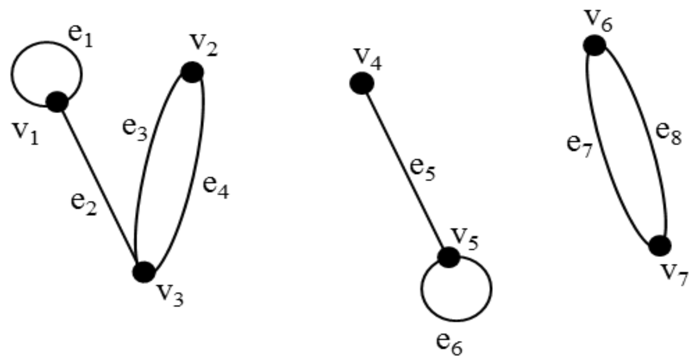
هرسطر i ام A كه درستون i ام A ضرب شود چون فقط يك صفر دريك صفر ضرب مي شود و n-1 تا 1 در
n-1 تا 1 ديگر ضرب وحاصل ها جمع مي شوند لذا هر درايه a_{ii} برابر n-1 است. اما هر سطرi ام A كه در هرستون j ام A($i \neq j$) ضرب شود دومقدار 1×0 و1×0 و بقيه 1×1 هستند كه با هم جمع مي شوند تعداد 1×1 ها برابرn-2 است لذا هردرايه غير واقع برقطر اصلي برابر n-2 است.

مشاهده مي كنيم كه هردرايه روي قطر اصلي A^2 برابر درجه هر رأس و برابرn-1 است.

مجموع درايه هاي ماتريس A^2 به صورت زيرمحاسبه مي شود كه مجموع درايه هاي روي هرسطر برابر
$(n-1)(n-2)+(n-1)$ يا برابر $(n-1)(n-1)=(n-1)^2$ است وچون n سطر داريم پس مجموع $n(n-1)^2$ است.

ماتريس مجاورت و مؤلفه ها يا بخش هاي همبند

گراف ناهمبند G رادرنظر مي گيريم كه شامل سه مؤلفه يا سه بخش همبند است.



ماتریس مجاور G به صورت زیراست:

$$A=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\\ v_7\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc:cc:cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right]\end{array}$$

چنانچه مشاهده میکنیم، A شامل ماتریس هاي بلوکي مربعي و ماتریس هاي بلوکي دیگر که همه درایه هاي آنها صفراست مي باشد. درواقع A را مي توان برحسب بلوك ها به صورت زیر نوشت:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0\\ 0 & 0 & A_3\end{bmatrix}$$

درواقع ماتریس A_1 ماتریس مجاورت مؤلفه یا بخش اول این گراف است و چون هیچ سه رأس این مؤلفه یعني v_1، v_2 و v_3 به رأس هاي دیگر متصل نیستند به همین دلیل سایر بلوك هاي سطر اول صفراند.

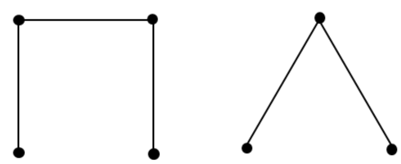
با توجه به مثال فوق مي توانیم قضیه زیر را در مورد گراف های چند مؤلفه اي بیان کنیم.

قضیه: فرض کنیم G گرافي با مؤلفه هاي همبند $G_1, G_2, \ldots, G_k$ رأس باشد. اگر هرمؤلفه همبند G_i داراي n_i رأس باشد و این رأس ها به ترتیب متوالي شماره گذاري شده باشند، آنگاه ماتریس مجاورت G به صورت زیر است.

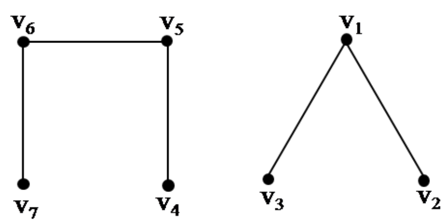
$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_k \end{bmatrix}$$

كه هر A_i ازمرتبه $n_i \times n_i$ ماتريس مجاورت G_i است، براي تمام i هايي كه به $i= 1,2,\ldots,k$.
و O ها نشان دهنده ماتريس هايي هستند كه همه درايه هاي آنها صفر است.

مثال 16 : ماتريس مجاورت گراف زيررابنويسيد.



حل : ابتدا رأس هاي G را برچسب گذاري مي كنيم به اين صورت ناهمبند بودن G از ماتريس مجاورت مشخص است. يعني ماتريس مجاورت به فرم ماتريسي است كه در قضيه قبل بيان كرديم.



پس A به صورت روبرو است:

$$A=\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

يا:

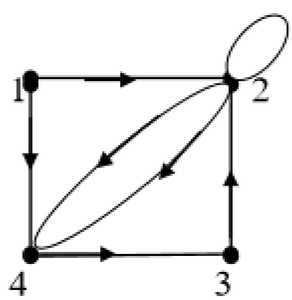
$$A=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0&1&0&0&0&0&0\\ 1&0&1&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0\\ \hline 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&0&1&0\\ 0&0&0&0&1&0&1\\ 0&0&0&0&0&1&0 \end{array}\right]\end{array}$$

ثابت مي شود كه در گراف G ازمرتبه n كه $n>1$ ، اگر A ماتريس مجاورت باشد آنگاه G همبند است اگر وفقط اگر هر درايه $A+A^2+\ldots+A^{n-1}$ مثبت باشد.

ماتريس مجاورت يك گراف جهت دار

با تفاوتي مي توان ماتريس مجاورت را براي يك گراف جهت دار نيز تعريف كرد. فقط وقتي گراف جهت دار است بايد تعداد قوس ها يا جهت های از يك رأس به رأس ديگر را درنظر گرفت. ابتدا به مثال زير توجه كنيد.

گراف جهت دار G و ماتريس را در زير مشاهده مي كنيد:



$$\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc} 0&1&0&1\\ 0&1&0&2\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0 \end{array}\right]\end{array}$$

درسمت چپ يك گراف جهت دار با 4 رأس برچسب دار را داريم، و در سمت راست يك ماتريس 4×4 را داريم. به نظر ميرسد كه هر درايه ماتريس تعداد پيكان ها يا يالهاي جهت دار از يك رأس به رأس ديگر را نشان ميدهد.

به عنوان مثال :

رأس ها 1 و2 به همين ترتيب به وسيله يك قوس يا پيكان يا يال جهت دار بهم متصل شده اند. بنابراين عدد 1 درسطر اول ستون دوم ماتريس واقع است.

رأس 2 به رأس 4 بوسيله 2 قوس بهم متصل است پس درايه واقع در سطر دوم ستون چهارم ماتريس برابر 2 است. رأس 4 به رأس1 با هيچ قوسي يا يالي ازجهت 4 به 1 متصل نشده است، بنابراين درايه

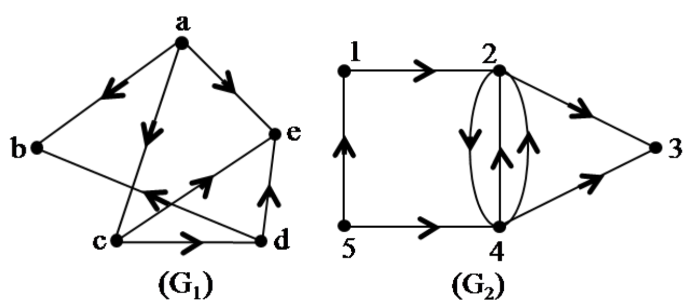
واقع درسطر چهارم وستون اول برابر صفراست. رأس 2 با يك قوس به خودش متصل است پس درايه واقع درسطر دوم و ستون دوم ماتريس برابر 1 است.

اكنون با توجه به مثال فوق تعريف زير را داريم:

تعريف: فرض كنيم D يك گراف جهت دار با n رأس برچسب دار n ,…, 3, 1,2 باشد.

A (D) ماتريس مجاورت D يك ماتريس $n \times n$ است به طوري كه هر درايه واقع درسطر i ام وستون j ام آن برابر تعداد قوس ها يا يالهاي جهت داري است كه از رأس i به رأس j متصل شود.

مثال 17 : ماتريس مجاورت گراف هاي جهت دار زير را بنويسيد.



حل : گراف جهت دار G_1 ساده و از مرتبه 5 است لذا ماتريس مجاورت آن يك ماتريس مربع مرتبه 5 به صورت زير است.

$$
\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

از رأس e و b هيچ قوسي يا پيكاني خارج نشده است. به همين دليل تمام درايه هاي سطر دوم و سطر پنجم صفر است.

گراف G_2 گرافي جهت دار است كه ساده نمي باشد. بنابراين درايه ها فقط 0 و 1 نمي باشند. اين گراف داراي پنج رأس است.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

از رأس 4 دو قوس به رأس 2 خارج شده است به همين دليل درايه واقع در سطر چهارم ستون دوم برابر 2 است. از رأس 3 هيچ قوسي خارج نشده است.

ويژگي هاي ماتريس مجاورت درگراف جهت دار

ويژگي هاي ماتريس مجاورت در گراف جهت دار با ماتريس مجاورت در گراف بدون جهت تفاوت هايي دارد.

1- درگراف جهت دار معمولاً ماتريس مجاورت متقارن نمي باشد مگر در حالاتي خاص.

2- اگر گراف جهت دار طوقه نداشته باشد آنگاه تمام درايه هاي روي قطر اصلی صفر اند.

3- مجموع درايه هاي هر سطر برابر درجه خروجي رأس متناظر آن سطر است.

يعني مجموع درايه هاي سطر i ام برابر تعداد قوس هايي است كه جهت آنها از v_i به خارج است.

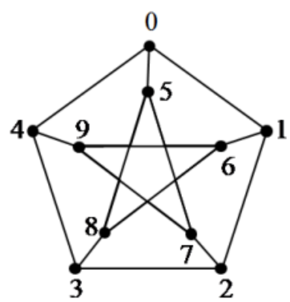
4 - مجموع درايه هاي هر ستون برابر درجه ورودي رأس متناظر آن ستون است.

يعني مجموع درايه هاي هرستون j ام برابر تعداد قوس هايي است كه به رأس v_j وارد مي شوند يا جهت آنها به طرف v_j است.

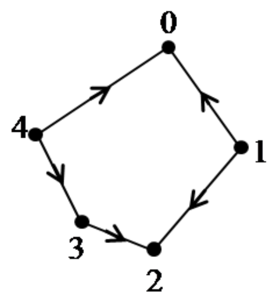
تمرينات

سوالات تشريحی

1- در گراف رسم شده رأس ها و يالها را بنويسيد. آيا اين گراف ساده است؟



2- در گراف جهت دار رسم شده، يال ها و رأس ها را مشخص كنيد. آيا اين گراف ساده است؟



3- كدام يك از دنباله هاي زير دنباله درجه هاي يك گراف ساده است؟

3، 2، 2، 2، 2

4, 3, 1, 0

3, 3, 2 ,2, 0

4, 4, 3, 2, 1

4, 3, 3, 3, 2, 2, 1

4- كدام دنباله زير دنباله درجه هاي يك گراف ساده است؟ گراف متناظر آن را رسم كنيد.

4, 3, 2, 2, 1, 1, 1

5, 3, 3, 1, 1, 1

2, 2, 2, 1, 1

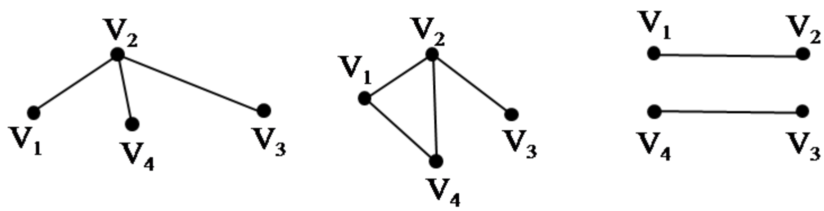
5- چهار جزیره A، B، C و D به وسیله 7 هفت پل به هم مربوط شده اند. دو پل بین A و B ، دو پل بین C و D ، يك پل بين A و C ، یک پل بین A و D و یک پل بین A و D وجود دارد. نمودار گرافيكي اين مجموعه را رسم كنيد. ايا ميتوان تمام پل هاي بين جزيره ها راقدم زد، به طوري كه از هر پل فقط يك بار بگذريم؟

6- گراف هاي متناظر با ماتريس هاي مجاورت زير كدام اند؟

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

7- گراف مكمل، اگر G يك گراف ساده باشد، مكمل G را كه با G' نشان مي دهيم، چنين تعريف مي كنيم:

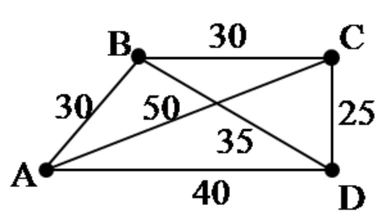
رأس هاي G' همان رأس ها G مي باشند. همچنين دورأس متمايز U و V در G' با يالي متصل اند. اگر وفقط اگر U و V در G با يالي به هم متصل نباشند، اكنون سه گراف G_1، G_2، G_3 در زير داده شده اند. مكمل هاي آنها راپيدا كنيد.



G1 G2 G3

8- چند درخت از مرتبه 6 وجود دارد، آنها رارسم كنيد.(بدون برچسب)

9- چهارشهر A, B, C و D با فاصله هاي آنها از يكديگر در نمودار بر حسب كيلومتر رسم شده اند.



دوره گردي مي خواهد از شهر A شروع به مسافرت كرده و از هر شهر فقط يك بار بگذرد و نقطه پايان سفر او نيز شهر A باشد.

او چگونه مي تواند اين شهرها را دور بزند، از بين اين دورها كدام كوتاه ترين است؟

10- آيا گراف با ماتريس مجاورت زير هميلتوني است؟

در صورت مثبت بودن جواب دور هميلتوني آن راپيدا كنيد.

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccc} V_0 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 & V_7 \end{array} \\
\begin{array}{c} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

11ـ G يك گراف ساده و همبند است كه اندازه آن 24 و درجه هر رأس حداقل 3 است. اين حداكثر ازمرتبه چند است؟

12ـ اگر درجه هر رأس از گرافي حد اقل برابر 2 باشد، ثابت كنيد اين گراف داراي دور است.

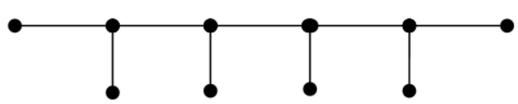
13ـ ثابت كنيد هرگراف همبند از مرتبه p واندازه q كه در آن q>p-1 داراي حد اقل يك دور است.

14- اگردنباله $\underbrace{1,\ldots,1}_{m\ \text{تا}}, 1, 3, 7, 8, 9$ دنباله درجه رأس هاي يك درخت باشند، آنگاه m كدام است؟

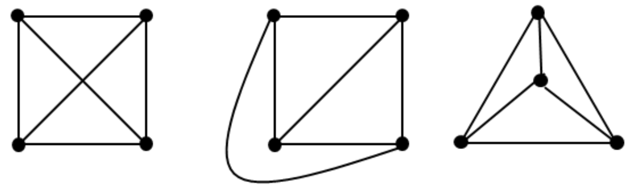
15 ـ دو درخت متمايز T_1 وT_2 مفروض اند، ثابت كنيد اگر دو رأس دلخواه از اين دو درخت را به هم وصل كنيم، گراف حاصل بازهم يك درخت است.

16ـ گرافي سه منتظم از مرتبه 8 چنان رسم كنيد كه هميلتني نباشد.

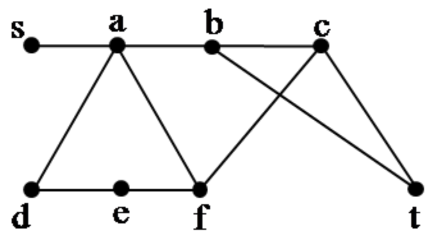
17 نشان دهيد، گراف با نمودار زير يك گراف بازه اي است.



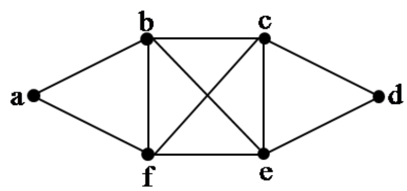
18 ـ گراف هاي زير مفروض اند. كدام يك با بقيه يكريخت نمي باشند.



19ـ درگراف زير تمام مسير هاي از s تا t رارسم كنيد.



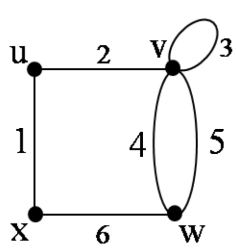
20ـ در گراف رسم شده كدام يك از دور ها هميلتني است؟



(4)abcefa (1)abedcfa (2)abecdefa (3) abcdefa

تمرينات چند گزينه ای

1ـ در مورد گرافي كه نمودار آن رسم شده است، چه تعداد از بيانيه هاي زير صحيح است؟



رأس هايv و w مجاورند.

رأس هاي v و x مجاورند.

رأس هاي u بر يال 2 واقع است.

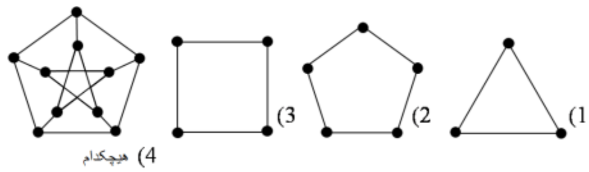
يال 5 بر رأس x واقع است

1(1 2(2 3(3 4(4

2- چند گراف ساده با چهار رأس{a ,b ,c ,d} وجود دارد که فقط دو يال داشته باشد و يك يال آن {a,b} باشد.

1)4   2)6   3)5   4)64

3- گراف G را در نظر مي گيريم. كدام گراف يك زير گراف G است؟



4 - گراف ساده اي داراي 6 يال است و درجه تمام رأس هاي آن 3 است. اين گراف چند رأس دارد؟

1)3   2)4   3)6   4)8

5- در گراف ساده و غير تهي G تعداد يال ها دو برابر تعداد رأس ها است. حد اقل تعداد رأس هاي اين گراف كدام بايد باشد؟

1)3   2)4   3)5   4)6

6- گراف سا ده G از مرتبه 8 و اندازه 13 مي باشد. اگر در اين گراف 2 رأس از درجه ماكسيمم و 6 رأس ازدرجه مينيمم باشند، آنگاه Δ ماكسيمم درجه رأس ها كدام است؟

1)2 يا 5   2)3 يا 4   3)4 يا 7   4)5 يا 7

7- گراف G با n رأس، 1- منتظم است، كدام صحيح است؟

1) n فرد است.   2) n زوج است.   3) 2n يال دارد.   4) كامل است.

8- چه تعداد ازگراف هاي زير موجود است؟

1.گرافي5 - منتظم با 12 يال

2.گرافي 3- منتظم با 5 رأس

3.گرافي2- منتظم باn رأس(n≥2)(ساده باشد يا نباشد).

4.گرافي4 - منتظم با 10 يال

1)1   2)2   3)3   4)4

9- گراف کامل K_5 چند زیرگراف کامل غیر یکریخت(بدون برچسب) دارد؟

3(1　　5(2　　31(3　　15(4

10- گراف کامل K_5 چند زیرگراف کامل برچسب دار، (یکریخت یا غیر یکریخت) دارد؟

5(1　　32(2　　31(3　　63(4

11- گراف کامل K_5 چند زیر گراف کامل 3 رأسي دارد؟

5(1　　31(2　　10(3　　15(4

12- يك گراف كامل داراي 45 يال است. تعداد رأس هاي اين گراف كدام است؟

10(1　　9(2　　5(3　　11(4

13- يك گراف ساده داراي 27 يال است. اين گرف حداكثر چند رأس از درجه 7 دارد؟

8(1　　7(2　　6(3　　5(4

14- يك گراف 6 ـ منتظم داراي 12 رأس است. اين گراف چند يال دارد؟

72(1　　36(2　　48(3　　4) چنين گرافي وجود ندارد.

15- يك گراف ساده 7- منتظم داراي 12 يال است. حداكثر مقدار r كدام ميتواند باشد؟

8(1　　3(2　　4(3　　6(4

16- گراف r- منتظم حداقل چند رأس دارد ؟

r-1 (1　　r (2　　r+1(3　　2r (4

17- چند گراف كامل از مرتبه p و اندازه p وجوددارد؟

هيچ　　1(2　　2(3　　p(4

18- در گراف همبند مرتبه p و اندازه q كدام همواره صحيح است؟

$q<\frac{p}{2}$ (1　　$q\geq\frac{p}{2}$ (2

$q=\frac{p}{2}$ (4 (3　　$\frac{p}{3}q \geq$

19- چه تعداد بیانیه هاي زیر صحیح است؟

الف) اگردر يك گراف ساده G، $q<p-1$ آن گاه گراف ناهمبند است.

ب) در هرگراف همبند درجه هر رأس همواره بزرگ تر یا مساوي 2 است.

ج) اگر گراف ساده G، r- منتظم باشد، آنگاه حداقل $r+1$ رأس دارد.

د) اگرگراف2- منتظم G نا همبند باشد، آنگاه حداقل 6 رأس دارد.

1(1　　2(2　　3(3　　4(4

20- چهار جزیره A،B، C و D به وسیله 6 پل به هم مربوطند. سه پل بین A و B، يك پل بین A و C يك پل بین A و D و يك پل بین B و C كدام درست است؟

1) دنباله درجه هاي گراف این مجموعه1،1 ،3 ،3 است.

2) هرگز نمي توان تمام پل ها را قدم زد، به طوري كه از پل فقط يك بار بگذريم.

3) ازهر جزیره كه شروع كنیم مي توانیم تمام پل ها را قدم بزنیم و از هر پل فقط يك بار بگذريم.

4) مي توان تمام پل ها را قدم زد و از هر كدام فقط يك بار گذشت، اما درصورتي كه شروع یا پایان از D باشد.

21- كدام دنباله درجه هاي رأس هاي يك گراف ساده مي تواند باشد؟

1) 3,3,3,3,3　　2) 1,2,3,4　　3) 0,0,2,3　　4) 1,2,2,3

22) چند درخت غیر یکریخت با 5 رأس وجود دارد؟

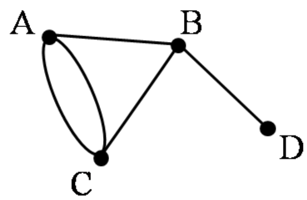
1(1　　2(2　　3(3　　4(4

23) ماتریس مجاورت يك گراف به صورت زير است. دراين گراف به ترتیب چند طوقه وچند يال غیر طوقه وجود دارد؟

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&2\\1&0&0&0\\1&0&0&2\\2&0&2&2\end{bmatrix}$$

1) 1 و 6 2) 2 و 5 3) 3 و 6 4) 3 و 5

24- درگراف رسم شده ماتريس مجاورت را درنظر مي گيريم. چند درايه اين ماتريس صفراست؟

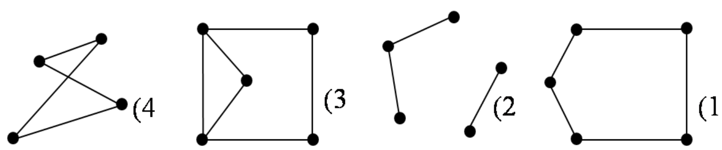


1) 4 2) 6 3) 8 4) 10

25- چند گراف دو بخشي 2 ـ منتظم و از مرتبه 10 وجود دارد؟

1) 2 2) 4 3) 3 4) 5

26- كدام يك از گراف هاي زير يك گراف بازه اي مي تواند باشد؟



27- ماتريس مجاورت يك درخت از مرتبه p داراي چند صفراست؟

1) p^2-p 2) p^2-2p+2 3) p^2+2p+2 4) p^2-p-1

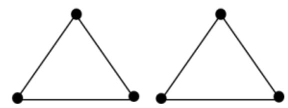
28- در گراف G از مرتبه p و اندازه q، $p+q=7$ اگر سه يال به G اضافه كنيم، G به يك گراف كامل تبديل مي شود، p كدام است؟

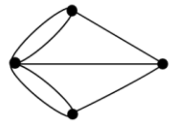
1) 3 2) 4 3) 5 4) 2

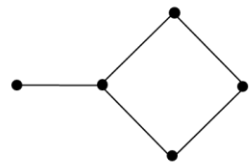
29- اگر $V=\{1,2,3,4\}$ مجموعه رأس ها و $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ مجموعه يال هاي گراف G باشند، به طوري كه e_1 و e_5 بين 1و2 و e_2 بين3 و4 و e_3 بين1و3 و e_4 بين 2 و 4 است. اين گراف داراي چند دوربه طول 4 است؟

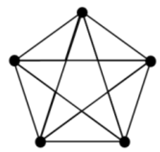
1)صفر 2) 1 3) 2 4) 3

30- كدام گراف اويلري است؟


(1


(2


(3


(4

31- گراف ساده G داراي 20 يال مي باشد. اين گراف حداقل چند رأس دارد؟

6(1 7(2 8(3 5(4

32- گراف ساده G با V={ a,b,c,d} و E={ab,ad,ac} چند زير گراف برچسب دارهمبند با حداقل يك يال دارد؟

5(1 6(2 7(3 8(4

33- دريك گراف r منتظم تعداد يال ها 24 وتعداد رأس ها p به طوري كه p,12<p<17 كدام است؟

16 (1 15 (2 13 (3 14 (4

34- در يك گراف كامل K_6 چند مسير به طول 2 وجود دارد؟

120(1 60(2 45(3 80(4

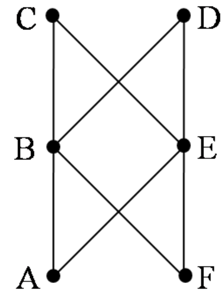
35-T يك درخت از مرتبه 10 است. ماتريس مجاورت T داراي چند درايه غير صفراست؟

18(1 20(2 16(3 9(4

36- اگر به يك درخت ازمرتبه p، تعداد 10 يال اضافه كنيم، يك گراف كامل K_p به دست مي آيد. P كدام است؟

4(1 5(2 6(3 8(4

37- درگراف زير چند دور وجود دارد؟



1) 8   2) 6   3) 5   4) 4

38- گراف G داراي 5 رأس و 4 يال است. كدام همواره صحيح است؟

1) G حتماً درخت است.   2) G حتماً يك رأس از درجه 3 دارد.

3) G مي تواندهمبند نباشد.   4) G، 2- منتظم است.

39- هر دو رأس گراف G دقيقاً به وسيله يك مسير به هم متصل مي باشند. اگر اين گراف داراي 6 رأس ازدرجه1 و 3 رأس از درجه 2 و m رأس از درجه 3 باشد، اين گراف ازمرتبه چند است؟

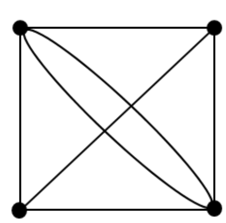
1) 12   2) 13   3) 14   4) 15

40- ماتريس مجاورت يك گراف به صورت زير است. دراين گراف مجموع درجه رأس ها چقدراست؟

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

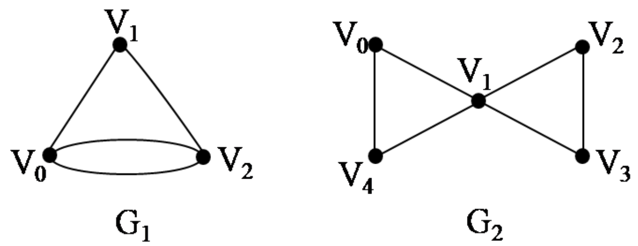
1) 5   2) 12   3) 8   4) 10

41- گراف زير چند دور اويلري دارد؟



1) صفر   2) 1   3) 2   4) 3

42ـ دو گراف G_1 و G_2 رسم شده اند، کدام گزينه همواره صحيح است؟



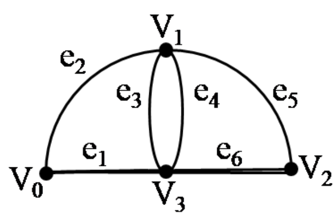
1)هردو دور اويلري و هميلتوني دارند.

2)هيچکدام دور اويلري و هميلتوني ندارد.

3)G_1 دور هميلتوني وG_2 دور اويلري دارد.

4) G_1 دور اويلري و G_2 دور هميلتوني دارد.

43ـ گراف رسم شده درشکل رادرنظر مي گيريم، کدام گزينه همواره صحيح است؟



1)دور اويلري وهميلتني ندارد.

2)دور اويلري دارد. اما هميلتني ندارد.

3)هم دور اويلري وهميلتني داردکه هر دو يکي هستنند.

4) هم دور اويلري وهم هميلتني دارد، اما متفاوت هستند.

44ـ کدام گزينه زير همواره صحيح است؟

1)گراف K_3 هم دور اويلري و هم دور هميلتوني دارد.

2)گرافي ساده از مرتبه p و اندازه p $(P\geq 3)$ وجود دارد که هيچ دوري ندارد.

3)اگر درگرافي تمام درجه رأس هاي آن زوج باشد، اويلري است.

4)گرافي وجود ندارد که هم دور اويلري و هم دور هميلتوني داشته باشد.

45ـ درختي از مرتبه 7 و فقط دو رأس از درجه 2 دارد، بقيه رأس ها از درجه چند مي باشند؟

1)يکي از درجه 1و 4 تا از درجه 3

2)يكي از درجه 4 و4 تا از درجه1

3)2 تا از درجه 3 و 3 تا ازدرجه 1

4) 5 تا ازدرجه1

46ـ دردرخت T باافزودن10 يال به آن يك گراف كامل پديد مي آيد. اين درخت داراي چند مسير به طول غير صفراست؟

10(1	15(2	18(3	12(4

47- اگر در گراف G از مرتبه 10 داشته باشيم $\Delta = \delta = 4$ در اين صورت اندازه گراف كدام است؟

20 (1	30 (2	40 (3	15 (4

48 ـ اگرمرتبه گراف G برابر 8 و اندازه آن 27 باشد، درجه چند رأس آن ماكسيمم است؟

4(1	5(2	6(3	7(4

49 ـ كدام يك از بيانيه هاي زير نادرست است؟

1)اگر گرافي دوري به طول n داشته باشد، حتماً يك مسير به طول n-1 دارد.

2) اگر گراف ساده اي از مرتبه p رأسي با درجه p-1 داشته باشد آنگاه داراي دور نمي باشد.

3) نامتناهي گراف كامل وجود دارد كه در آنها p=q

4) نامتناهي گراف منتظم وجود دارد كه در آنها p=q

50- ماتريس مجاورت نظير يك درخت داراي 12 درايه برابر يك است. مرتبه ماتريس كدام است؟

5(1	6(2	7(3	8(4

51- درجه هر رأس از گرافي حداقل 2 است، كدام صحيح است؟

1)حتماً همبند است.

2)همواره درخت است.

3) حداقل يك دور دارد.

4) همواره دو دور متمايز دارد.

52- درهردرخت T کدام همواره صحیح است؟

1)مجموع اندازه و مرتبه مي تواند عددي زوج باشد.

2)اگر ماكسيمم درجه در درخت برابر m باشد، آنگاه حداقل m رأس از درجه1 دارد.

3)درهردرخت بين دو رأس بيش ازيك مسير وجود دارد.

4)اگر در گرافي q=p-1 باشد، آنگاه درخت است.

53- دنباله درجه رأس هاي يك درخت $4,4,3,3,2,1,1,\underbrace{..,1}_{m\ \text{تا}}$ است. m كدام است؟

1)6 2)8 3)10 4)5

54- در يك گراف ماكسيمم درجه رأس ها $\Delta=3$ و مينيمم درجه رأس ها $\delta=1$ است. اگر تعداد يال ها در اين گراف 18 و تعداد رأس ها زوج باشد، حداكثر و حداقل تعداد رأس ها كدامند؟

1)16 و6 2)18و6 3)18و8 4)12 و6

55- گراف همبند G با 8 يال حداكثر چند رأس دارد؟

1)10 2)7 3)8 4)9

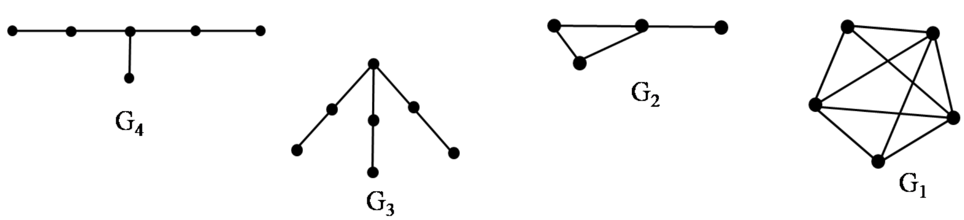
56- بازه هاي (1،3)، (2،6)، (5،6)، (4،8) مفروضند. گراف متناظر اين بازه ها را در نظر مي گيريم. دنباله گرافيكي آن كدام است؟

1)3،1،1،1 2) 3,2,1,1 3) 3,2,2,1 4)2,2,1,1

57- بازه هاي (4،7)،(6،9)،(3،8)،(1،10)،(2،5) مفروضند. گراف متناظر اين بازه ها چند رأس از درجه 4 دارد.

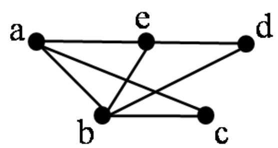
1)هيچ 2)1 3)2 4)3

58- چه تعداد از گراف هاي رسم شده گراف بازه اي است؟



1(1 2(2 3(3 4(4

59- در گراف شکل مقابل چند مسیر متمایز از رأس a به رأس b وجود دارد؟



1(2 2(3
3(4 4(5

60- گراف G از مرتبه حد اکثر چند باشد تا داراي 20 يال و درجه هر رأس آن حداقل 4 باشد؟

1(12 2(10 3(8 4(16

61- تعداد مسیر هاي متمایز در يك درخت 66 است. مرتبه درخت كدام است؟

1(10 2(12 3(65 4(24

62- از يك گراف كامل K_p يك رأس برمي داريم. از تعداد يال هاي آن چه تعداد كم مي شود؟

1(1 2(p 3(p-1 4(p+1

63- M ماتریس مجاورت گراف يك درخت از مرتبه p است، كدام صحيح نمي باشد؟

1) تعداد دارايه هاي برابر عدد1 برابر(p-1)2 است.

2) مجموع درايه قطراصلي ماتريس M^2 برابر(p-1)2 است.

3) درايه هاي روي قطر اصلي ماتريس M همگي صفرمي باشند.

4) سطري وجوددارد كه تمام دارايه هاي آن صفر باشد.

64- در گراف كامل K_4 مجموع درايه هاي ماتريس M^2 برابر كدام است؟

1(36 2(72 3(45 4(24

65- اگر M ماتریس مجاورت گراف كامل K_p باشد، هر درايه روي قطر اصلي ماتريس M^2 كدام است؟

1(n 2(n-2 3(n-1 4)صفر

66- گراف 3- منتظم G از مرتبه p و اندازه q مفروض است. به طوري كه q=2p-3 دراين صورت كدام همواره صحيح است؟

1)از مرتبه 8 است. 2) از مرتبه 5 است. 3)هميلتني است. 4)اويلري است.

67- گراف 1- منتظم ازمرتبه 1382 داراي چند يال است؟

1382(1 691(2 1832^2 (3 690(4

68- گرافي از مرتبه چهار كه هم اويلري و هم هميلتني باشد، داراي چند يال است؟

3(1 4(2 6(3 4)چنين گرافي وجود ندارد.

69- چند درخت برچسب دار ازمرتبه 4 داريم؟

32(1 64(2 8(3 16(4

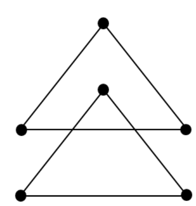
70- چند گراف منتظم همبند و از مرتبه 15 وجود دارد؟

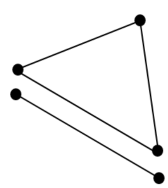
5(1 7(2 14(3 10(4

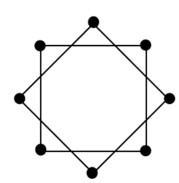
71- كدام دنباله مي تواند، دنباله درجه هاي رأس هاي يك گراف باشد؟

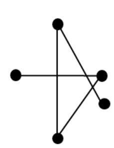
5,4,3,2,0 (1 3,3,2,2, 0(2 4,3,2,2,0 (3 5,3,3,2,0 (4

72- كدام گراف همبند است؟


(1


(2


(3


(4

73- درگراف ساده G=(V,E)، V={a,b,c,d,e,f}، E(G) پانزده عضو دارد. از هرعضو V حداقل چند يال مي گذرد؟

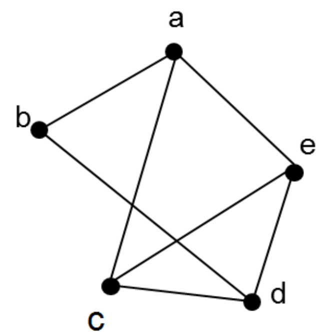
2(1 3(2 4(3 5(4

74- مرتبه گراف G، 8 و اندازه آن 27 مي باشد، درجه چند رأس ماكسيمم است؟

5(1 6(2 7(3 8(4

75- درگراف شكل زير چند مسير به طول 3 از a به e وجود دارد؟

1) 5   2) 4   3) 3   4) 2



76- گراف همبند G فاقد دور است، مجموع مرتبه واندازه آن كدام عدد مي تواند باشد؟

1) 12   2) 15   3) 18   4) 20

77- در يك گراف با درجه رأس هاي 3,3,2,2,2 دو رأس با ماكسيمم درجه غير مجاور مي باشند. تعداد دور هاي با طول 4 كدام است؟

1) 3   2) 2   3) 1   4)صفر

78- اگر A ماتريس مجاورت گراف G با مرتبه 4 باشد، حاصل ضرب درايه هاي قطري ماتريس A^2 كدام عدد نمي تواند باشد؟

1) 3   2) 12   3) 18   4) 36

79- گرافي كه دنباله درجه رأس هايش 3,2,2,1,1,1,1,1 مي باشد، چگونه است؟

1)قطعاً داراي دوراست.

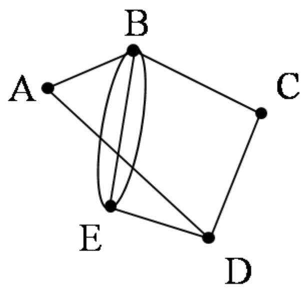
2)درخت است.

3) همبند است.

4) ناهمبند است.

80- شكل زير 5 نقطه A،B،C،D و E را با 8 پل به هم راه داده است. اگر مجاز باشيم از هرپل دقيقاً يك بار عبور كنيم، با شروع از منطقه B پايان كدام است؟

1) نشدني است.   2) B   3) D   4) E



81- تعداد درخت هاي از مرتبه 6 چند تا است؟

1) 4   2) 5   3) 6   4) 7

82- درجه رأس هاي گراف همبند G به صورت 2،3،4،5،b،a است کمترین عدد a+bکدام است؟

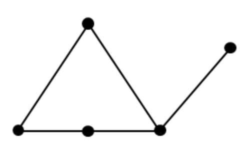
1) 1   2) 2   3) 3   4) 4

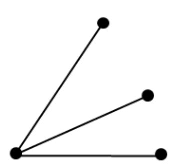
83- چند نوع گراف ساده همبند و نامنظم که مجموع مرتبه و اندازه آن 10 است وجود دارد؟

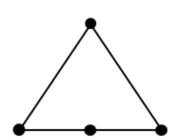
1) 3   2) 4   3) 5   4) 6

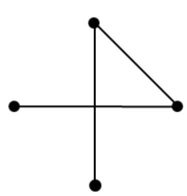
84- ماتريس زير متناظر كدام گراف است.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(1


(2


(3


(4


فصل سوم

رابطه ها و شبکه

قبل از اینکه رابط ها را مورد بحث و بررسی قرار دهیم یک نگاه کوتاه و مختصری به حاصلضرب دکارتی دو ست می نماییم.
حاصل ضرب دکارتی دو ست A و B عبارت است ازست تمام جفت های مرتب (x , y) که x عضوی از A و y عضوی از B باشد وآن را با نماد $A\times B$ نشان می دهیم:

$$A\times B=\{(x,y): x\epsilon A, y\epsilon B\}$$

توجه: $A\times A$ رابا A^2 و $A\times A\times A$ را با A^3 و... نشان می دهیم.

مثال1: اگر $A=\{1,2,4\}$ و $B=\{3,5\}$ باشد، مطلوب است

الف. $A\times B$ ب. $B\times A$

حل: الف. $A\times B=\{(x,y): \boldsymbol{x}\epsilon A, y\epsilon B\}$

$=\{(1,3),(1,5),(2,3),(2,5),(4,3),(4,5)\}$

حل: ب. $B\times A=\{(x,y): x\epsilon B, y\epsilon A\}$

$=\{(3,1),(3,2),(3,4),(5,1),(5,2),(5,4)\}$ □

مثال 2: ست های $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{2,4\}$ مفروض می باشند، مطلوب است حاصلضرب دکارتی $A\times B$ ، $B\times A$ و $B\times B$

$A\times B=\{(a,2),(a,4),(b,2),(b,4),(c,2),(c,4)\}$
$B\times A=\{(2,a),(4,a),(2,b),(4,b),(2,c),(4,c)\}$
$B\times B=\{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)$

توجه: درحالت کلی $A\times B\neq B\times A$

تذکر: حاصل ضرب دکارتی سه ست (یا بیشتر) مشابه به حاصل ضرب دکارتی دو ست قابل تعریف است در واقع حاصل ضرب دکارتی سه ست A،B و C عبارت است از تمام سه تایی های مرتب به صورت (a ,b, c) که در آن $a\in A$ ، $b\in B$ و $c\in C$ یعنی :

$$A\times B\times C=\{(a,b,c): a\epsilon A,\ b\epsilon B,\ c\epsilon C\}$$

مثال 3: فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{a , b\}$ دراین صورت

$$A\times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

$$B\times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$$

مثال 4: فرض کنید $T=\{2,3,5\}$. حاصل ضرب دکارتی $T\times T$ رامشخص کنید.

حل: $T\times T = \{(2,2),(2,3),(2,5),(3,2),(3,3)\ (3,5),(5,2),(5,3),(5,5)\}$ □

رابطه (Relation)

هرگاه A وB ست های غیر خالی باشند، هر ست فرعی ای از $A\times B$ را یک رابطه از A به B می نامیم.
هرگاه R رابطه ای از A به B باشد و $(a , b)\epsilon A\times B$ یکی ازاعضای رابطه R باشد، دراین صورت می نویسیم $(a , b)\epsilon R$ یا از سمبول a R b استفاده می کنیم، هرگاه $(a , b)\notin R$ از سمبول $a\not R b$ استفاده می کنیم.

اگر A=B باشد، دراین صورت R را رابطه ای روی A می نامیم.

مثال5: ستهای A ،B وT رادرمثال های 3 و 4 و رابطه های R_2,R_1 وR_3 رابه صورت زیردر نظر بگیرید. دراین صورت R_1 رابطه ای از A به B، R_2 رابطه ای ازB به A و R_3 رابطه ای روی T است، که :

$$R_1=\{(1,a),(2,a),(2,b)\}$$

$$R_2=\{(a,1),(b,1),(b,3)\ \}$$

$$R_3=\{(2,2),(3,3),(5,5)\}$$

چون $(1,a)\epsilon R_1$ بنابراین $1R_1a$ وبه طور مشابه داریم:

$$bR_21 \quad , bR_23 \quad ,2R_32$$

اما

$$3\not R_1b \quad , a\not R_22 \quad ,a\not R_33$$

مثال 6 : اگر $A = \{1, 2, 3\ \}$ و $B = \{\ a , b\ \}$ باشند آنگاه ست $R = \{(1,a),(1,b),(3,a)\}$ یک رابطه از ست A در ست B است. می توانیم بنویسیم: 1Ra و $2\not Ra$ و3Ra و $3\not Rb$
مثال 7 : فرض می کنیم $W = \{a, b, c\}$، در اینصورت ست $R=\{(a , b),(a , c),(c , c),(c , b)\}$ یک رابطه در w است. می توان نوشت:

$a \not R a \quad , \quad b \not R a \quad , a R c \quad , \quad a R b$

مثال 8 : ست $R=\{(x , y) \mid x \in \mathbb{R} , y \in \mathbb{R} , y < x^2\}$ یک سب ست $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ است که نشان دهنده همه جفت های مرتبی است که در قانون $y < x^2$ صدق می کند. R یک رابطه در $\mathbb{R}$ ست اعداد حقیقی است.

مثال 9 : فرض می کنیم A ست اعداد حقیقی باشد R را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$R=\{(x , y) \mid 2x^2 + 5y^2 \le 10$ ، در این صورت R یک رابطه روی A است.

مثال 10 : اگر A ست ای از ست ها باشد آنگاه $\subseteq$ رابط ای در A است دو ست Y , X را در A در نظر بگیرید یا $X \subseteq Y$ است و یا $x \subsetneq Y$ است.

ناحیه تعریف رابطه

ست همهٔ مؤلفه های اول جفت های مرتب یک رابطه را ناحیه تعریف (domain) رابطه گویند. یعنی $\{ x \mid (x , y) \mid \in R \}$ ناحیه تعریف رابطه R است.

برد رابطه

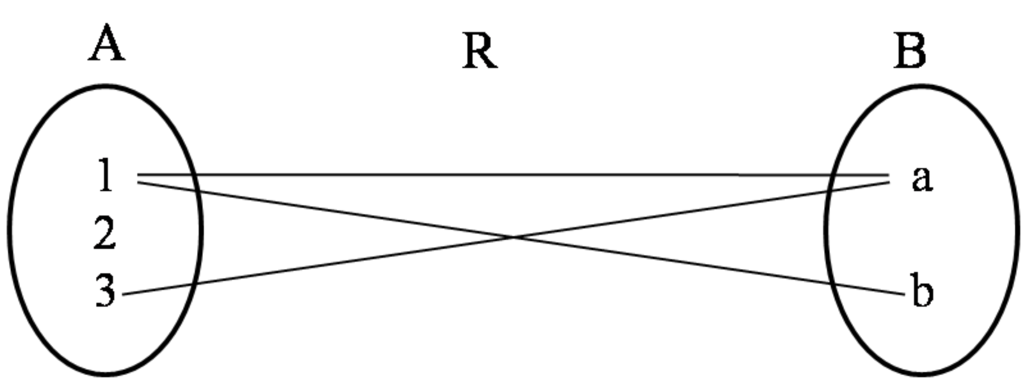
ست همهٔ مؤلفه های دوم جفت های مرتب یک رابطه را برد (range) رابطه گویند یعنی $\{ y \mid (x , y) \in R\}$ برد رابطه است.

مثال 11 : در مثال 6 ناحیه تعریف رابطه R $\{ 1 , 3 \}$ و برد رابطه $\{ a , b \}$ می باشد. در مثال 7 ناحیه تعریف رابطه $\{ a , c \}$ و برد رابطه $\{ b , c \}$ می باشد.

مثال 12 : در مثال 9 یعنی رابطه $R = \{(x , y) \mid 2x^2 + 5y^2 \le 10 \}$ ناحیه تعریف رابطه $\{x \mid x \in \mathbb{R} , -\sqrt{5} \le x \le \sqrt{5}$ و برد رابطه $\{y \mid y \in \mathbb{R} , -\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2} \}$ می باشد.

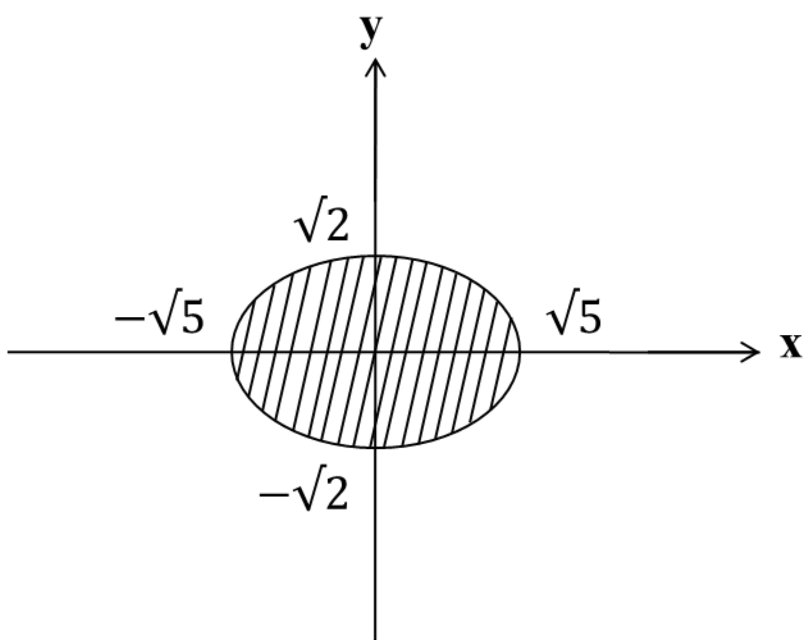
رابطه ها را می توان به صورت تصویری نیز نشان داد. اگر ست های A و B تعداد کمی عنصر داشته باشند می توانیم آنها را به صورت دو ست نشان دهیم و عناصر جفت های مرتب را به وسیله ی قطعه خط های به هم پیوند دهیم.

مثال 13 : رابطه مثال 6 را می توان به صورت تصویری قرار ذیل نشان داد.



اگر R رابطه ای از A در B باشد و A و B سب ست هایی از اعداد حقیقی باشند ، آنگاه هر جفت مرتب (x , y) از رابطه R به صورت یک نقطه در صفحه نمایش داده می شود. نمایش تصویری R ست همهٔ نقاطی است که با جفت های مرتب (x , y) نمایش داده شده اند.

مثال 14 : شکل 3 نمایش تصویری رابطه مثال 9 است که یک بیضی به مرکز مبدأ مختصات با نقاط داخل آن می باشد.



رابطه معکوس

هر رابطه ای مانند R از ست A در ست B یک رابطه معکوس R^{-1} از ست B در ست A دارد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$R^{-1} = \{(y , x) \mid (x , y) \in \mathrm{R}\}$$

مثال 15 : اگر $A = \{1 , 2 , 3\}$ و $B = \{a , b\}$ باشند آنگاه :

$$R = \{(1 , a) , (1 , b) , (3 , a)\}$$

یک رابطه از A در B است. رابطه معکوس R به صورت زیر است:

$$R^{-1} = \{(a , 1), (b , 1), (a , 3)\}$$

مثال 16 : اگر $W = \{a , b , c\}$ باشد آنگاه $R = \{(a , b) , (a , c) , (c , c) , (c , b)$ یک رابطه در W است. رابطه معکوس آن به صورت زیر است:

$$R^{-1} = \{(b , a) , (c , a) , (c , c) , (b , c)\}$$

مثال 17 : فرض می کنیم $R = \{(x , y) \mid y = x^3\}$ رابطه ای در ست اعداد حقیقی باشد رابطه معکوس آن به صورت $R^{-1} = \{(y , x) \mid y = \sqrt[3]{x}\}$ خواهد بود.

انواع رابطه ها

الف. رابطه ی بازتابی (reflexive relation)

فرض کنید R رابطه ای روی ست A باشد یعنی R یک سب ست A x A باشد. در این صورت رابطه ی R روی ست A یک رابطه بازتابی (انعکاسی) است، هرگاه برای هر $a \in A$ داشته باشیم:
$(a , a) \in R$ و یا می نویسیم a R a ، به عبارت دیگر رابطه R یک رابطه ی انعکاسی است هرگاه هر عضو از A با خودش در رابطه باشد. به این ترتیب R یک رابطه ی بازتابی نیست اگر یک $a \in A$ وجود داشته باشد به طوریکه $(a,a) \notin R$

مثال 18 : روابط زیر دارای خاصیت بازتابی هستند.

1) سب ست بودن روی کلاس ستها، برای هر ست A داریم: $A \subseteq A$.
2) مساوی بودن روی ست اعداد حقیقی.
3) موازی بودن روی مجموعه ی خطوط.
4) رابطه $\leq$ (کوچکتر یا مساوی) روی ست اعداد حقیقی.
5) رابطه $\geq$ (بزرگتریامساوی) روی ست اعداد حقیقی. □

مثال19: روابط زیر دارای خاصیت انعکاسی نیستند:
1) رابطه> (کوچکتر) روی ست اعداد حقیقی.
2) رابطه < (بزرگتر) روی ست اعداد حقیقی.
3) رابطه برادر بودن روی ست انسان ها.
4) رابطه پدر بودن روی ست انسان ها. □

مثال 20 : فرض می کنیم :
$A = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ و $R = \{(1 , 1),(2 , 4),(3 , 3),(4 , 1), (4 ,4)\}$ یک رابطه در A باشد. R یک رابطه انعکاسی نیست زیرا (2 , 2) متعلق به R نیست.

مثال 21 : اگر A ست مثلث های صفحه باشد و R در A رابطه تشابه مثلثها تعریف شده باشد آنگاه R یک رابطۀ انعکاسی است چون هر مثلث با خودش مشابه است.

مثال 22 : اگر R یک رابطه در ست اعداد حقیقی باشد به طوری که $R= \{(x , y) \mid x , y \in \mathbb{R} , x < y\}$ آنگاه R یک رابطه انعکاسی نیست زیرا برای $a \in R$ داریم:

$$a \nless a$$

مثال 23 : اگر A خانواده ست ها باشد و R یک رابطه سب ست بودن در A باشد انگاه R یک رابطه انعکاسی است زیرا هر ست سب ست خودش می باشد.

ب. رابطه ی متقارن (symmetric relation)

رابطه ی R روی ست A یک رابطه متقارن است، هرگاه برای $(a , b) \in R$ داشته باشیم $(b , a) \in R$.
یعنی اگر a در رابطه با b باشد آنگاه b نیز در رابطه با a باشد، یا به عبارت دیگر:

$$a\,R\,b \Longrightarrow b\,R\,a$$

R متقارن نیست اگر $a,b \in R$ وجود داشته باشد به طوریکه $(a,b) \in R$ اما $(b,a) \notin R$.

مثال 24: روابط زیر متقارن هستند:

1)رابطه متعامد بودن روی ست خطوط.

2) رابطه هم قد بودن روی ست انسان ها.

3) رابطه مساوی بودن روی ست اعداد حقیقی.

4) رابطه موازی بودن روی ست خطوط. □

مثال 25: روابط زیر متقارن نیستند:

1) رابطه $\le$ روی ست اعداد حقیقی.

2)رابطه $\ge$ روی ست اعداد حقیقی.

3) رابطه $\subseteq$ روی کلاس ست ها.

4) رابطه برادر بودن روی ست انسان ها، مثلاً علی برادر زهرا است، درحالی که زهرا برادر علی نیست. □

مثال 26 : اگر $A = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ و $R = \{(1 , 3),(4 , 2),(2 , 4),(3 , 2),(3 ,1)\}$ ، R یک رابطه تقارنی یا متقارن نیست زیرا: $(3 ,2) \in R$ ولی $(2 , 3) \notin R$

مثال 27 : اگر A ست مثلثهای صفحه باشد و R رابطه تشابه مثلثها در A باشد آنگاه R یک رابطه تقارنی است زیرا اگر مثلث a به مثلث b متشابه باشد مثلث b نیز با مثلث a متشابه است.

مثال 28: اگر R یک رابطه در اعداد طبیعی N باشد به طوری که $x , y \in N$ آنگاه x ، عدد y را بشمارد یعنی $x \mid y$. آنگاه R یک رابطه تقارنی نیست زیرا مثلاً 2 عدد 4 را می شمارد ولی 4 عدد 2 را نمی شمارد.

یعنی $4 \mid 2$ ولی $2 \mid 4$ یا به عبارتی دیگر $(2 , 4) \in R$ ولی $(4 , 2) \notin R$

ج. رابطه ضد متقارن(antisymmetric relation)

رابطه ی R روی ست A یک رابطه ی ضد متقارن است هرگاه:

$(a , b) \in R$ و $(b , a) \in R \Longrightarrow a = b$ به عبارت دیگر اگر a خلاف b باشد a و b به تنهایی و b و a به تنهایی ممکن است در رابطه باشند ولی هر با هم خیر. رابطه ضد متقارن را طور ذیل نیز می نویسیم.

$$a\,R\,b \;\;,\;\; b\,R\,a \Longrightarrow a = b$$

بنابراین رابطه ی R ضد متقارن نیست اگر $a,b \in R$ باشد به طوری که (a,b) و (b,a) به R تعلق

داشته باشند اما $a \neq b$.

مثال 29: روابط زیر ضد متقارن هستند:

1) رابطه$\subseteq$ روی کلاس ست ها

$$A\subseteq B \;\; ,B\subseteq A \Longrightarrow A=B$$

2)رابطه$\leq$ روی ست اعداد حقیقی

$$a\leq b\, , b \leq a \Longrightarrow a = b$$

3)رابطه $\geq$ روی ست اعداد حقیقی.

مثال 30 : اگر R رابطه ای در N باشد به طوری که اگر $x , y \in N$ آنگاه $x \mid y$. R یک رابطه ضد متقارن است زیرا اگر :

$$a \mid b\, , b \mid a \Longrightarrow a = b$$

مثال 31 : اگر $W = \{1 , 2 , 3 , 4\}$ و $R = \{(1 , 2) , (4 ,2) , (4 , 4) , (2 , 4)\}$ باشد. R یک رابطه ضد متقارن نیست زیرا:

$$(2 , 4) \in R \quad \text{و} \quad (4 , 2) \in R$$

می باشد ولی $4 \neq 2$

مثال 32 : اگر A خانواده ستها باشد و $R = \{(x , y) \mid x , y \in A , x \subseteq y$ رابطه در A باشد، انگاه R یک رابطه ضد متقارن است زیرا:

$$A \subseteq B\, , B \subseteq A \Longrightarrow A = B$$

د. رابطه ی انتقالی (transitive relation)

رابطه ی R روی ست A یک رابطه ی انتقالی (متعدی) است، هرگاه :

$(a , b) \in R$ و $(b, c) \in R \Longrightarrow (a , c) \in R$ به عبارت دیگر اگر a در رابطه با b باشد و b در رابطه با c باشد آنگاه a در رابطه با c باشد. رابطه ی انتقالی را طور ذیل نیز می توانیم تحریر نماییم، اگر:

$$a\,R\,b \;\; , b\,R\,c \Longrightarrow a\,R\,c$$

بنابراین رابطه ی R یک رابطه ی انتقالی نیست اگر $a,b,c \in R$ وجود داشته باشد به طوری که $(a,b) , (b,c) \in R$ اما $(a,c) \notin R$.

مثال 33: روابط زیر همگی انتقالی هستند:

1) رابطه$\subseteq$ روی کلاس ستها، برای ستهای B,C,D اگر$B\subseteq C$ و$C\subseteq D$ دراین صورت $B\subseteq D$

2) رابطه تساوی روی ست اعداد حقیقی.

3) رابطه مضرب بودن روی ست اعداد تام ، اگر m مضربی از n وn مضربی ازp باشد، دراین صورت m مضربی ازp خواهد بود.

4) روابط $\leq$ ، $>$ ، $\geq$ و $<$ روی ست اعداد حقیقی. □

مثال 34 : اگر A ست همه انسانهای روی کره زمین باشد و R به صورت زیر تعریف شده باشد.

$$R = \{(x , y) \mid x , y \in A \text{ ، } x \text{ ، } y \text{ را دوست می دارد} \}$$

رابطه R یک رابطه انتقالی نیست. زیرا اگر a شخص b را دوست داشته باشد و b شخص c را دوست داشته باشد دلیلی ندارد که a شخص c را دوست داشته باشد.

مثال 35 : اگر R رابطه ای در اعداد حقیقی به صورت ذیل تعریف شده باشد:

$$R = \{(x ,y) \mid x , y \in \mathbb{R} \ , \ x < y\}$$

R یک رابطه انتقالی است زیرا :

$$a < b \quad , \quad b < c \quad \Longrightarrow \quad a < c$$

مثال 36 : اگر $W = \{a , b , c\}$ و $R = \{(a , b) , (c , b) , (b , a) , (a , c)\}$ باشد. R یک رابطه انتقالی نیست زیرا:

$$(c , b) \in R \text{ و } (b , a) \in R \text{ می باشد ولی } (c , a) \notin R$$

رابطه هم ارزی (equivalence relation)

رابطه R در ست A یک رابطه ی هم ارزی (معادلت) است هرگاه:

R -1 بازتابی باشد یعنی برای هر $a \in A$ داشته باشیم :

$$(a , a) \in R$$

R -2 متقارن باشد یعنی

$$(a , b) \in R \Leftrightarrow (b , a) \in R$$

-3 انتقالی باشد یعنی

$$[\,(a , b) \in R \ , \ (b , c) \in R\,] \Longrightarrow (a , c) \in R$$

مثال 37: فرض کنیم A ست مثلثهای صفحه باشد و R رابطه تشابه مثلث ها در A باشد. R بازتابی ، متقارن و انتقالی است، پس R یک رابطه ی هم ارزی است.

مثال 38 : بهترین مثال رابطهٔ هم ارزی ، رابطهٔ برابری در هر ست می باشد. برای هر عضو هر ست داریم:

1) $a = a$ انعکاسی

2) $a = b \Leftrightarrow b = a$ تقارنی

$3)\ \ a = b \quad \wedge \quad b = c \quad \Longrightarrow$ ا نتقالی

مثال 39 : رابطه موازی بودن در ست خطوط صفحه یک رابطه هم ارزی است زیرا اگر ست خطوط صفحه را با A نمایش دهیم داریم:

$1)\ \forall\, D \in A \quad , \quad D \parallel D$ بازتابی

یعنی هر خط موازی با خودش می باشد.

$2)\ \forall\, D_1, D_2 \in A \quad , \quad D_1 \parallel D_2 \iff D_2 \parallel D_1$ تقارنی

یعنی اکر خط D_1 موازی خط D_2 باشد، آنگاه خط D_2 نیز موازی خط D_1 است.

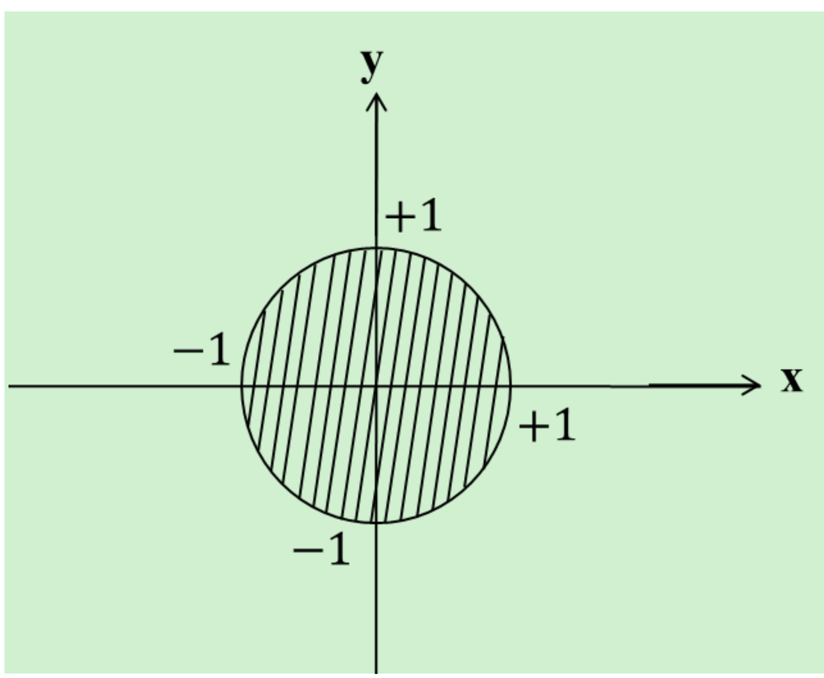
$3)\ \forall\, D_1, D_2, D_3 \in A, (D_1 \parallel D_2, D_2 \parallel D_3) \Longrightarrow D_1 \parallel D_3$ انتقالی

یعنی اگر خط D_1 موازی D_2 باشد و خط D_2 موازی خط D_3 آنگاه خط D_1 موازی خط D_3 است.

مثال 40 : رابطه R در ست اعداد حقیقی به صورت زیر تعریف شده است:

$$R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \ , \ x2 + y2 \leq 1\}$$

الف – گراف رابطه را رسم کنید.
ب – ویژگی های انعکاسی ، تقارنی و انتقالی را بررسی کنید.
ج – ناحیه تعریف و برد رابطه را مشخص کنید.



نمایش تصویری $x^2 + y^2 \leq 1$

ناحیه ی تعریف $= [-1 , +1]$ برد $= [-1 , +1]$

حل : دارای خاصیت بازتابی نیست چون : $(1 , 1) \notin R$ زیرا $1^2 + 1^2 \nleq 1$
دارای خاصیت تقارنی می باشد چون :

$$(a , b) \in R \Longrightarrow a^2 + b^2 \leq 1 \Longrightarrow b^2 + a^2 \leq 1 \Longrightarrow (b , a) \in R$$

دارای خاصیت انتقالی نیست زیرا:

$$(a , b) \in R \Longrightarrow a^2 + b^2 \leq 1$$

$$(b , c) \in R \Longrightarrow b^2 + c^2 \leq 1$$

طرفین دو رابطه را با هم جمع می کنیم:

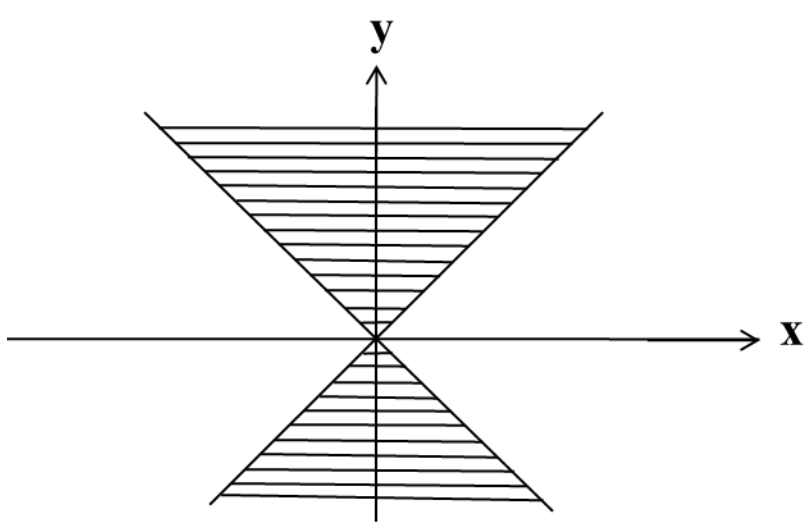
$$a^2 + 2b^2 + c^2 \leq 2 \Longrightarrow a^2 + c^2 \leq 2 - 2b^2$$

در اینجا باید $2 - 2b^2 = 1$ باشد یعنی $b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ پس برای $b = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ درست است و رابطه برای این مقدار b انتقالی است پس به طور کلی دارای خاصیت انتقالی نیست.

مثال 41 : رابطه R در ست اعداد حقیقی به صورت ذیل تعریف شده است:

$$R = \{(x , y) \mid x , y \in \mathbb{R} ,\ |x| \leq |y| \}$$

گراف رابطه رسم نموده و خاصیت های انعکاسی و تقارنی و انتقالی را بررسی کنید.



نمودار $|x| \leq |y|$

حل :

دارای خاصیت بازتابی است زیرا:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad ; \quad |x| \le |x|$$

دارای خاصیت تقارنی نیست زیرا:

$$\forall x , y \in \mathbb{R} \quad ; \quad |x| \le |y| \quad \not\Rightarrow \quad |y| \le |x|$$

به عنوان مثال

$$|3| \le |4| \quad \not\Rightarrow \quad |4| \le |3|$$

که چنین نیست

دارای خاصیت انتقالی است زیرا:

$$\forall x , y , z \in \mathbb{R} \quad ; \quad (|x| \le |y| \ \land \ |y| \le |z| \ \Rightarrow \ |x| \le |z|$$

ترتیب جزیی (partial ordering)

هرگاه A یک ست غیر خالی و R رابطه ای روی A باشد که دارای خاصیت انعکاسی، ضد متقارن وانتقالی است، آن گاه R را یک ترتیب جزیی یا ترتیب ناقص برروی A می نامیم و معمولاً آن را با سمبول $\le$ نشان می دهیم.

مثال 42 : هرگاه A کلاس ست ها و R رابطه $\subseteq$ روی A باشد، دراین صورت R یک ترتیب جزیی روی A است. زیرا دارای خواص انعکاسی، ضد متقارن وانتقالی است. □

مثال 43 : رابطه کوچکتر یا مساوی بود ن (($\le$)) در ست اعداد حقیقی یک رابطه ترتیب جزیی است.

زیرا:

$$1)\ \forall a \in \mathbb{R} \quad ; \quad a \le a$$

$$2)\ \forall a , b \in \mathbb{R} \quad ; \quad a \le b \ \wedge \ b \le a \quad \Rightarrow \quad a = b$$

$$3)\ \forall a , b , c \in \mathbb{R} \quad ; \quad a \le b \ \wedge \ b \le c \ \Rightarrow \ a \le c$$

به همین ترتیب رابطه بزرگتر یا مساوی بودن نیز (($\ge$)) در ست اعداد حقیقی یک رابطه ترتیب جزیی است.

مثال 44 : فرض کنید $S=\{2,3,4,5,\ldots\}$ و رابطه D راروی S، رابطه عاد کردن درنظر بگیرید. برای $a\,D\,b,\ a , b \in S$ هرگاه b , a راعاد کند (یعنی a مقسوم علیه b است یا b مضربی از a است)، مثلاً $2D6$، $10D50$ اما $3D19$ و... دراین صورت D یک ترتیب جزیی روی S است، زیرا

1) برای هر $a \in S$ داریم $a\,D\,a$ یعنی D یک رابطه انعکاسی است.

2) (ضد متقارن) $a\,D\,b \;,\; b\,D\,a \Longrightarrow a = b$

3) (انتقالی) $a\,D\,b \;,\; b\,D\,c \Longrightarrow a\,D\,c$

ست مرتب جزیی (partially ordered set)

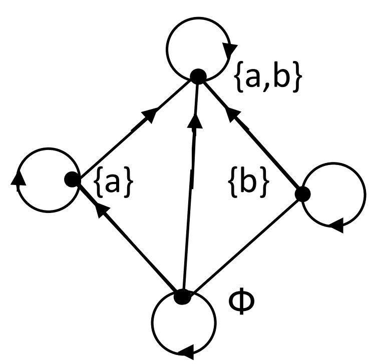
هرگاه $\leq$ یک ترتیب جزیی روی A باشد، آنگاه$(A \,،\leq)$ رایک ست جزئاً مرتب یا یک ست مرتب جزیی ویا به طور خلاصه Poset می نامیم.

تعریف: هرگاه$(A،\leq)$ یک ست مرتب جزیی باشد، آنگاه a و b را در A **مقایسه پذیر** می نامیم اگر یکی از حالات $a\leq b$ یا $b\leq a$ برقرار باشد. درغیر این صورت a وb را **مقایسه ناپذیر** می نامیم.

مثال 45 : رابطه D را درمثال 44 درنظر بگیرید برای اعداد$3,10\epsilon S$ چون چون $3\not{D}10$ و$10\not{D}3$ لذا 3 و 10 مقایسه ناپذیر هستند، درحالی که 2 و8 مقایسه پذیرند چون $2D8$. □

توجه: همان گونه که درتعریف یک ترتیب جزیی ذکر شد، معمولاً یک ترتیب جزیی رابانماد$\leq$ نشان می دهیم که نبایدآن رابا رابطه کمتر یا مساوی روی مجموعه اعداد یکی گرفت، برای تمایز، از این پس رابطه کمتر یا مساوی را" $\leq$ معمولی" می نامیم.

ترتیب های جزیی رامی توان به کمک نمودار(گراف) نیز نمایش داد. فرض کنید $B=\{a,b\}$ و$A=p(B)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a , b\}\}$ دیاگرام ست مرتب جزئی$(A,\subseteq)$ به صورت زیر است:



دقت کنید که ازاین که مثلاً $\emptyset\subseteq\{a\}$ لذا دورأس متناظر ست های ø و {a} توسط یک یال سودار از ø به سمت{a} رسم شده است. هم چنین ازاین که هرگاه $x \in A$ داریم $x\subseteq x$ لذا تمام رئوس دارای یک حلقه هستند، درواقع وجود حلقه ها دررئوس به خاصیت انعکاسی رابطه ترتیب جزئی مربوط می باشد.

نکته: هرگاه $(A,\leq)$ یک ست مرتب جزئی بوده و $a,b \in A$ وداشته باشیم $a\leq b$ می گوییم ((a قبل از b است)) یا ((b بعداز a است)). هم چنین $a\geq b$ را به معنی $b\leq a$ درنظر می گیریم. $a< b$ را به صورت((a اکیداً قبل از b است)) می خوانیم وبه این معنی است که $a\leq b$ و $a\neq b$. گاهی $a\leq b$ و $b\leq c$ رابه صورت $a\leq b\leq c$ نیز می نویسیم وگوییم b بین a و c است. اگر $a\leq c$ وهیچ عضوی مانند $b \in A$ بین a و c وجودنداشته باشد به قسمی که $a\leq b$ و $b\leq c$ گوییم a مقدم بلافصل (immediate predecessor) c است و یا c تالی بلافصل (immediate successor) a است.

مثال: فرض کنید $S=\{2,3,4,5,12,16,24,36,48\}$ توسط بخش پذیری مرتب شده باشد. پیدا کنید.

الف: مقدم ها و مقدمهای بلافصل 12 را

ب: تالی ها و تالیهای بلافصل 12 را

حل: الف: عدد های 2 ، 3 و 4 همه قبل از 12 هستند. توجه داریم که 2 مقدم بلافصل 12 نیست چون 2|4|12. ولی 3 و 4 مقدمهای بلافصل 12 هستند، چون هیچ عنصری از S بین 3 و 12 یا بین 4 و 12 نیست.

ب: عدد های 24 ، 36 و 48 بعد از 12 هستند ، اما فقط 24 و 36 تالیهای 12 هستند. (یاد آوری می کنیم که 16 بعد از 12 نمی آید چون 12 ، 16 را نمی شمارد یا به عبارت دیگر 12 عدد 16 را بالای خویش پوره تقسیم نمی کند). می دانیم که برای ست های جزئاً مرتب مقدمهای بلافصل و تالیهای بلافصل لازم نیست که یکتا باشند.

دیاگرام هاسه (Hasse diagram)

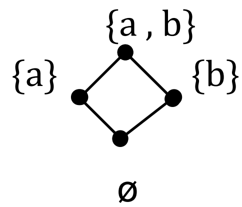
با توجه به خواص انعکاسی وانتقالی در یک رابطه ترتیب جزئی می توانیم دیاگرام مربوط به رابطه را به صورت ساده تری رسم کنیم که دیاگرام حاصل دیاگرام ها سه نامیده می شود. برای رسم دیاگرام هاسه مربوط به یک رابطه ترتیب جزئی مراحل زیررا انجام می دهیم.

1- چون تمامی رئوس به علت خاصیت انعکاسی دارای حلقه هستند تمامی حلقه ها را حذف می کنیم.

2- چون رابطه انتقالی است یال هایی را که ابتدا و انتهای سه رأس متوالی را به هم وصل کرده اند، حذف می کنیم (مانند یالی که رئوس متناظر با ø و$\{a , b\}$ رادرشکل(1) به هم وصل کرده است).

3- درصورتی که جهت یال ها به یک سمت باشد می توانیم جهت یال هارانیز حذف کنیم.

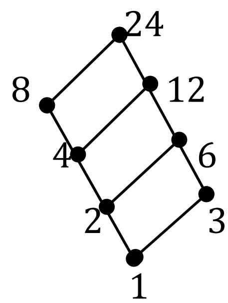
بنابراین می توان نتیجه گرفت که دردیاگرام هاسه فقط رئوسی که سابق یا تالی بلافصل هستند به هم وصل می شوند. با توضیحات فوق دیاگرام هاسه مربوط به شکل(1) یعنی ست مرتب جزئی$(A,\subseteq)$ به صورت زیراست:



توجه: دیاگرام هاسه فوق یک گراف ساده است.

مثال 46 : فرض کنید $B=\{1,2,3,4,,6,8,12,24\}$ ورابطه R راروی B به صورت عاد کردن درنظر گرفته ودیاگرام هاسه مربوط به مجموعه مرتب جزئی (B,R) رارسم نمایید.

حل: این دیاگرام به صورت زیراست:



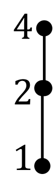
تعریف 4. هرگاه $(A,\leq)$ یک ست مرتب جزئی باشد به طوری که هردوعضو A نسبت به رابطه $\leq$ مقایسه پذیر باشند دراین صورت رابطه $\leq$ را یک ترتیب ساده (simple order) یا یک ترتیب خطی (linear order) و یا یک ترتیب کلی (total order) روی A نامیده و $(A,\leq)$ را یک ست مرتب کلی و یا یک زنجیر (chain) می نامیم.

مثال 47: الف. اگر$A=\{1,2,3,4\}$ و رابطه $\leq$ را روی A به صورت رابطه عاد کردن درنظر بگیریم آن گاه $(A,\leq)$ یک زنجیر نیست زیرا3 و 4 در A مقایسه ناپذیر هستند.

ب. اگر $A=\{ø,\{a\},\{a , b\},\{a , b , c\}\}$ آن گاه $(A,\subseteq)$ یک زنجیراست.

پ. اگر $A=\{ø,\{a\},\{a , b\},\{b , c\}\}$ آن گاه$(A,\subseteq)$ یک زنجیر نیست زیرا$\{a , b\}$ و$\{b , c\}$ مقایسه پذیر نیستند. □

مثال 48 : اگر $A=\{1,2,4\}$ و رابطه R راروی A به صورت رابطه عاد کردن در نظر بگیریم آن گاه (A,R) یک زنجیر است دیاگرام ها سه متناظر با آن به صورت زیراست.



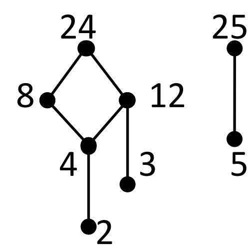
تعریف. درست مرتب جزئی $(A,\leq)$ عضوی مانند $a \in A$ راعضو **ماکزیمال (maximal)** می نامیم اگر هیچ عضوی از A بعد از a نباشد به عبارت دیگراگر $a\leq x$ آنگاه $x = a$.

عضوی مانند $b \in A$ راعضو **می نیمال (minimal)** یا می نامیم هرگاه هیچ عضوی از A قبل ازb نباشد به عبارت دیگر اگر $y\leq b$ آنگاه $y = b$

مثال 49: الف. درمثال 46، عضو می نیمال 1 وعضو ماکزیمال 24 است.

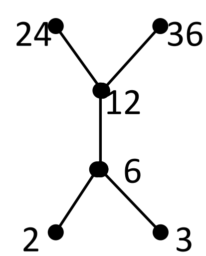
ب. درمثال 48 که یک زنجیر است 1 عضومی نیمال و4 عضوماکزیمال است.

پ. اگر $A=\{2,3,4,5,8,12,24,25\}$ و B رابطه عاد کردن روی A باشد اولاً دیاگرام ها سه (A,R) به صورت زیر است.



ثانیاً 2 ،3 و5 اعضای می نیمال و24 و25 اعضای ماکزیمال هستند.

ت. فرض کنید $A=\{2,3,6,12,24,36\}$ وR رابطه عاد کردن روی A باشد، اولاً دیاگرام هاسه مربوط به (A,R) به صورت زیر است:



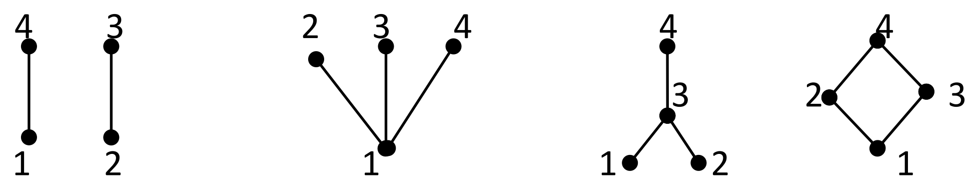
ثانیاً 2 و3 اعضای می نیمال و24 و36 اعضای ماکزیمال هستند.

تعریف . هرگاه $(A,\leq)$ یک ست مرتب جزئی باشد عضو $M \in A$ را **ماکزیمم (maximum)** A می نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم $x \leq M$. همچنین عضو $m \in A$ را **می نیمم (minimum)** A می نامیم هرگاه برای هر $x \in A$ داشته باشیم $m\leq x$.

توجه: اعضای ماکزیمم ومی نیمم درصورت وجود منحصر به فرد هستند.

يادداشت: اعضای ماكزيمال وماكزيمم، هم چنين اعضای می نيمال ومی نيمم در يک ست مرتب جزئی بايد ازهم تميز داده شوند. اگرعضوی ماكزيمم يا می نيمم باشد كليه اعضای ست بايد با آن ها قابل مقايسه باشند. البته هرعضو ماكزيمم عضو ماكزيمال نيز هست وهرعضو می نيمم عضو می نيمال نيز هست اما عكس اين موارد الزاماً درست نيست.

مثال 50: فرض كنيد A={1,2,3,4} ورابطه مرتب جزئی تعريف شده بر روی A به صورت دياگرام های زيرباشند. اعضای ماكزيمال، می نيمال وماكزيمم ومی نيمم را درمورد هر دياگرام مشخص كنيد.



(د) (ج) (ب) (الف)

حل: درشكل (الف) عدد 1 عضومی نيمم وعدد 4 عضو ماكزيمم است.

درشكل (ب) عدد 4 عضو ماكزيمم واعداد 1 و 2 اعضاي مي نيمال هستند اما عضومي نيمم وجود ندارد.

درشكل (ج) عدد 1 عضومي نيمم واعداد3،2 و4 اعضاي ماكزيمال هستند اما عضوماكزيمم وجود ندارد.

درشكل (د) عضوماكزيمم وعضومي نيمم وجودندارد اما3 و4 اعضاي ماكزيمال واعداد1 و2 اعضاي مي نيمال هستند.

تعريف: هرگاه $(A,\leq)$ يك ست مرتب جزئي وK سب ست A باشد آن گاه عضوي مانند α در A را يك كران بالا (upper bound) براي K مي ناميم هرگاه براي هر$x \in K$ داشته باشيم $x \leq \alpha$.هرگاه ست كران هاي بالا داراي مي نيمم باشد آن را كوچك ترين كران بالا (least upper bound) برای K يا سوپريمم (supremum) K ناميده وآن را با sup(K) نشان مي دهيم. به طور مشابه عضوβ از A را يك كران پايين (lower bound) براي K مي ناميم.هرگاه براي هر $x \in k$ داشت باشيم $\beta \leq x$. هرگاه ست كران هاي پايين ماكزيمم داشته باشد آن را بزرگ ترين كران پايين (greatest lower bound) k يا اينفيمم (infimum) k ناميده و با inf(k) نشان مي دهيم.

مثال 51: N راست اعداد طبيعي با رابطه بخش پذيري درنظر بگيريد دراين صورت N يك ست مرتب جزئي با اين رابطه است. هرگاه D را مجموعه مقسوم عليه هاي 12 درنظربگيريم يعني D={1,2,3,4,6,12} ، دراين صورت 24 يك كران بالا براي D است و1 تنها كران پايين D است. اعداد12 و36 نيز كران هاي بالايي براي D هستند اما 20 يك كران بالا براي D نيست زيرا 20 برتمام

اعضايD بخش پذير نيست و يا 20 بعد از تمام اعضاي D قرارندارد. داريم $\inf(D)=1$ و $\sup(D)=12$. همچنين هرگاه قراردهيم $C=\{3,4,6\}$ دراين صورت1 تنها كران پايين اين ست واعداد12 ،24 و... كران هاي بالايي براي آن هستند. داريم $\inf(C)=1$ و $\sup(C)=12$. □

توجه: سوپريموم و اينفيموم يك ست درصورت وجود منحصربه فرد هستند وممكن است يك ست فاقد يكي يا هر دوي آن ها باشد.

شبكه (lattice)

يك ست S باترتيب جزئي $\preceq$ را يك **شبكه** مي ناميم اگر درآن هر دو عضودلخواه a وb (به صورت ست دوعضوي {a , b}) داراى سوپريموم و انفيموم باشد. بزرگترين كران پايين سب ست {a , b} ازS را با $a * b$ و كوچك ترين كران بالاي آن رابا $a \oplus b$ نشان مي دهيم.

$\inf\{a , b\} = a * b$ را حاصل ضرب و $\sup\{a , b\} = a \oplus b$ راحاصل جمع a وb مي ناميم.* و $\oplus$ را به ترتيب با سمبولهاي ديگري مانند $\wedge$ و$\vee$ ، $\cap$ و$\cup$ يا. و+ نيز نشان مي دهند.

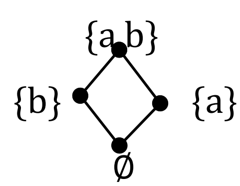
مثال 52: هر زنجير يك شبكه است زيرا به ازاي هر a وb واگر $a\preceq b$ آنگاه $\sup\{a , b\} = b$ و $\inf\{a,b\} = a$. □

مثال 53 : هرگاه A كلاس ست ها با رابطه $\subseteq$ باشد آنگاه A يك شبكه است زيرا به سادگي مي توان نشان داد (نشان دهيد) براي هر دو ست a وb در A داريم:

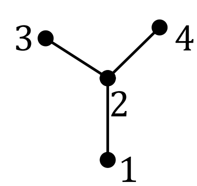
$$\sup\{a, b\} = a \cup b$$

$$\inf\{a , b\}=a \cap b$$

مثال 54 : اگر$S=\{a , b\}$ دياگرام شبكه $(S,\subseteq)$ به صورت زيراست:

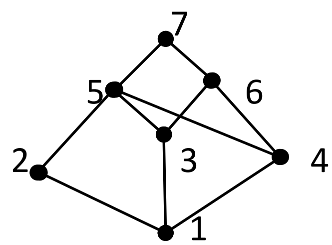


مثال 55: آيا دياگرام زير نشان دهنده يك شبكه هست؟



حل: خير، زيرا $\sup\{3,4\}=3\oplus4$ تعريف نشده است. □

مثال 56 : آيا دياگرام زير يك شبكه را نشان مي دهد؟



حل: خير، زيرا 3 و 4 كران هاي پايين {5,6} هستند اما 3 و 4 مقايسه ناپذير هستند بنابراين $\inf\{5,6\}=5*6$ وجود ندارد. □

قضيه. هرگاه $(S,\le)$ يك شبكه باشد آن گاه براي هر $a , b ,c \in S$ داريم:

1. قوانين خود تواني (Idempotent laws) $a*a=a,\quad a \oplus a=a$

2. قوانين جا به جايی (Commutative laws) $a*b=b*a,\quad a \oplus b = b \oplus a$

3. قوانين شركت پذيري (Associative laws) $a*(b*c)=(a*b)*c,\quad a\oplus(b \oplus c)=(a \oplus b)\oplus c$

4. قوانين جذب (absorption laws) $a*(a \oplus b)=a,\quad a\oplus(a*b)=a$

□

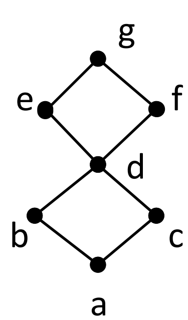
تعريف: شبكه $(S,\le)$ را **توزيع پذير**(distributive) مي ناميم هرگاه به ازاي هر a , b , c در S داشته باشيم:

$$a * (b \oplus c) = (a * b)\oplus(a * c)$$

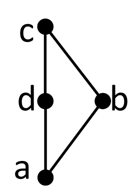
و

$$a \oplus (b*c) = (a \oplus b)*(a \oplus c)$$

مثال 57: شبكه هاي داده شده توسط دياگرام هاي زير توزيع پذير هستند (نشان دهيد).



(ب)



(الف)

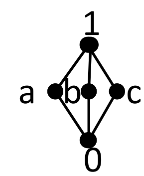
مثال 58 : با توجه به مثال 53 هرگاه S ست غير خالی باشد آن گاه $(P(S),\subseteq)$ يك شبكه توزيع پذير است زيرا* و$\oplus$ بر روي S به ترتيب بااعمال مجموعه اي $\cap$ و$\cup$ متناظر مي شوند و مي دانيم براي هر سه ست b,a وc داريم:

$$a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c)$$

و

$$a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c)$$

مثال 59: دياگرام يك شبكه به صورت زير است.آيا اين شبكه توزيع پذيراست؟



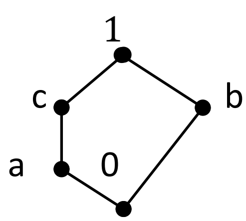
حل: با توجه به دياگرام داريم: $a*(b\oplus c)=a*1=a$

اما از اين كه $a*b=0,\quad a*c=0$

بنابراين $(a*b)\oplus(a*c)=0\oplus 0=0$

لذا شبكه مورد نظر توزيع پذيرنيست. □

مثال 60 : آيا شبكه متناظر با دياگرام زير توزيع پذيراست؟



حل: باتوجه به دياگرام داريم: $a\oplus(b*c)=a\oplus 0=a$

ازطرفي $a \oplus b=1,\qquad a \oplus c=c$

لذا $(a \oplus b)*(a \oplus c)=1*c=c$

بنابراين $a \oplus (b*c)\neq (a \oplus b)*(a \oplus c)$

يعني شبكه مورد نظر توزيع پذير نيست. □

سب شبكه (sub lattice)

هرگاه $(S,\leq)$ يك شبكه باشد و $P\subseteq S$ دراين صورت اگر $(p,\leq)$خود يك شبكه باشد آن را يك سب شبكه $(S,\leq)$مي ناميم.

مثال 61: هرگاه N ست اعداد طبيعي و R را رابطه عاد كردن درنظر بگيريم آنگاه (N,R) يك ست مرتب جزئي است. هرگاه تعريف كنيم:

$$\sup\{a , b\} = \mathrm{lcm}(a , b)$$

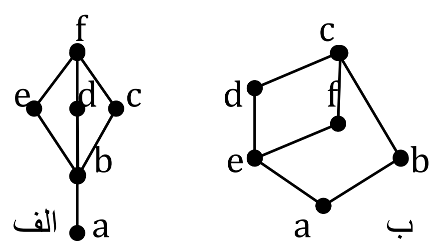
$$\inf\{a , b\} = \gcd(a , b)$$

كه درآن$\mathrm{lcm}(a , b)$ كوچكترين مضرب مشترك (least common multiple) a وb و$\gcd(a , b)$ بزرگ ترين مقسوم عليه مشترك (greatest common divisor) a وb است آنگاه (N,R) يك شبكه است. اگر D_{24} ست مقسوم عليه هاي عدد 24 باشد آن گاه (D_{24},R) خود يك شبكه است لذا (D_{24},R) يك سب شبكه براي (N,R) است. درحالت كلي هرگاه m عددي بزرگ تراز از1 باشد و D_m ست مقسوم عليه هاي m آنگاه (D_m , R) يك سب شبكه (N,R) است. اما ست $S=\{2,3,6\}$ با رابطه R يك سب شبكه(N,R) نيست زيرا$\inf\{2,3\}=1$ و$1\notin S$. □

قضيه زير راهي را براي تشخيص شبكه هايي كه توزيع پذير نيستند ارائه مي دهد.

قضيه. يك شبكه توزيع پذير نيست اگر و فقط اگر داراي سب شبكه اي يكريخت (isomorphic) با يكي از گراف هاي مثال 59 يا 60 باشد. □

مثال 62 : با توجه به قضيه 2 شبكه هاي متناظر با گراف هاي زير توزيع پذير نيستند:



شبكه ی كران دار (bounded lattice)

هرگاه $(S,\leq)$ يك شبكه باشد اين شبكه داراي كران پايين است وآن را با علامت0 نشان مي دهيم هرگاه براي هر $x \in S$ داشته باشيم $0 \leq x$. هم چنين شبكه داراي كران بالا ست وآن را با 1 نشان

مي دهيم هرگاه براي هر $x \in S$ داشته باشيم $x \le 1$. يك شبكه را كران دار (محدود) مي ناميم هرگاه داراي كران پايين 0 و كران بالاي 1 باشد.

تذكر: هرگاه $(S,\le)$ با * و $\oplus$ يك شبكه باشد معمولاً آن رابا $(S,*,\oplus)$ نشان مي دهيم. يك شبكه كران دار با $(S,*,\oplus,0,1)$ نشان داده مي شود.

مثال 63: اگر $A = \{a , b , c\}$ و $S = p(A)$ شبكه $(S,\cap,\cup)$ داراي كران پايين$\emptyset$ وكران بالاي A است يعني داريم $0=\emptyset$ و $1=A$. □

مثال 64: ست اعداد طبيعي N بارابطه $\le$ معمولي يك شبكه با كران پايين 1 است ولي فاقد كران بالا است. □

مثال 65: ست $A=\{x \mid 1< x \le 2\}$ بارابطه $\le$ معمولي يك شبكه است 2 كران بالاي آن است ولي فاقد كران پايين است. □

مثال 66: ست $A=\{x \mid 1<x<2\}$ بارابطه $\le$ معمولي يك شبكه است ولي كران دار نيست زيرا فاقد كران هاي بالا و پايين است. اما ست $B=\{x \mid 1\le x \le 2\}$ بارابطه $\le$ معمولي يك شبكه كران داراست 2 كران بالاي آن و 1 كران پايين شبكه است. □

توجه: هرشبكه متناهي $S = \{ x_1 , x_2 , . . . , x_n\}$ كران داراست زيرا مي توان نشان داد $x_1\oplus x_2\oplus...\oplus x_n$ كران بالاي آن و $x_1*x_2*......*x_n$ كران پايين آن است.

تذكر: درشبكه كران دار$(S,*,\oplus,0,1)$ براي هر$a \in S$ داريم:

$$a\oplus 1=1,\quad a*1=a,\quad a\oplus 0=a,\quad a*0=0,\quad 0\le a \le 1$$

روابط فوق با توجه به تعريف به سادگي قابل اثبات هستند.

تعريف: در شبكه كران دار $(S,*,\oplus,0,1)$ عضو $b \in S$ را مكمل عضو $a \in S$ مي ناميم هرگاه

$$a * b = 0 \ , \quad a \oplus b = 1$$

نكته: با توجه به اين كه در يك شبكه كران دار داريم

$$a \oplus 1 = 1, \qquad a * 1 = a$$

باقرار دادن $a = 0$ داريم:

$$0 \oplus 1 = 1, \qquad 0 * 1 = 0$$

لذا 0 مكمل 1 است و به طور مشابه 1 مكمل 0 است.

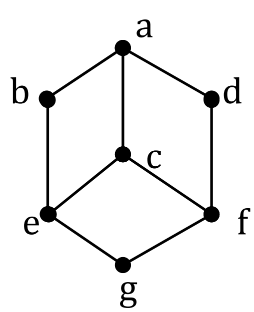
شبکه مکمل پذیر

شبکه کران دار $(S,\leq)$ را **مکمل پذیر** ناميم هرگاه هرعضو $a \in s$ حداقل داراي يك مکمل باشد.

مثال67 : اگر $A = \{a, b, c\}$ و $S=p(A)$ آنگاه $(S,\cap,\cup)$ يك شبکه کران داراست که $0=\emptyset$ و$1=A$. مکمل هرعضوازS متمم آن عضو نسبت به A است به عنوان مثال مکمل $\{a\}$ ست $\{b , c\}$ است ومکمل $\{a, b\}$ ست $\{c\}$ است. لذا هرعضو S داراي مکمل است بنابراين، اين شبکه مکمل پذير است. توجه داشته باشيد که قبلاً نشان داديم شبکه توزيع پذير نيز هست. □

نکته: يك شبکه الزاماً مکمل پذير نيست و مکمل يك عضو درصورت وجود منحصر به فرد نيست.

مثال 68: شکل زير گراف متناظر با يك شبکه است دراين شبکه b وe هردو مکمل d هستند اما c مکمل ندارد. دقت کنيد که داريم $0=g$ و$1=a$.

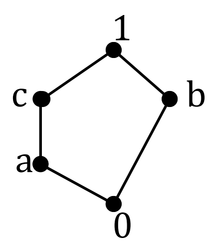


b مکمل d است زيرا داريم

$$b \oplus d=\sup\{b ,d\}=a,\ \ b*d=\inf\{b , d\}=g$$

به طور مشابه e نيز مکمل d است.

مثال 69: شبکه زير گراف متناظر با يك شبکه کران دار و مکمل پذير رانشان مي دهد اما اين شبکه توزيع پذيرنيست.



دراين شبکه داريم $\quad b \oplus c=1, \quad b * c = 0$

لذا c مکمل b است. هم چنين $\quad b \oplus a = 1, \quad b *a = 0$

بنابراين a هم مکملي b است. درنتيجه a وc هر دو مکمل b هستند. دراين شبکه داريم

$$a\oplus(b*c) = a\oplus 0 = a$$

درحالي که

$$(a \oplus b)*(a \oplus c) = 1*c = c$$

بنابراين شبکه توزيع پذيرنيست. □

نکته: دريك شبکه هرگاهx مکمل y باشد آن گاه y نيز مکمل x است.

قضيه. هرگاه $(S,*,\oplus)$ يك شبكه مكمل پذير وتوزيع پذير باشد آن گاه مكمل هرعضو $a \in S$ منحصر به فرد است. مكمل منحصر به فرد a را با a' نشان مي دهيم.

اثبات. فرض كنيد x و y هردومكمل a باشند نشان مي دهيم $x=y$ داريم

$$x=x*1=x*(a \oplus y)=(x*a) \oplus (x*y)=0 \oplus (x*y)$$
$$=(y*a)\oplus(y*x)=y*(a \oplus x)=y*1=y \quad \square$$

تعريف. يك شبكه توزيع پذير و مكمل پذير را يك جبربولي مي ناميم.

جبر بولي و كاربرد های آن در دروس آينده مورد بررسي قرار مي گيرد.

مسائل حل شده

1) $A=\{a, b, c, d\}$ و $B=\{a, e\}$ مطلوب است.

الف. $A\times B$ ب. $B\times A$ پ. $A\times B$ چند عضودارد؟

ت. تعداد زير مجموعه هاي $A\times B$ را تعيين كنيد.

جواب: الف $A\times B = \{(a,a),(a,e),(b,a),(b,e),(c,a),(c,e),(d,a),(d,e)\}$

ب. $B\times A = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(e,a),(e,b),(e,c),(e,d)\}$

پ. 8 ت. $2^8 = 256$

2) اگر $A=\{2k+1: k \in N, 1\leq k \leq 3\}$ و $B=\{x : x \in N, x^2 \leq 16\}$ مطلوب است

الف. $A\times B$ ب. $B\times A$

جواب : الف. داريم $A=\{3,5,7\}$ و $B=\{1,2,3,4\}$ و از آن

$A\times B =\{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(7,1),(7,2),(7,3),(7,4)\}$

ب. $B\times A = \{(1,3),(1,5),((1,7),(2,3),(2,5),(2,7),(3,3),(3,5),(3,7),(4,3),(4,5),(4,7)\}$

3) فرض كنيد $C=\{1,2,3,4,5\}$ و B رابطه اي روي C باشد كه به صورت زير تعريف شده است

$$R = \{(1,2),(1,4),(3,1),(3,4),(3,5),(5,1),(5,2),(5,4)\}$$

i) درستي يا نادرستي هريك ازاحكام زير رابيان داريد:

الف. 1R4 ب. 2R5 پ. $3\cancel{R}1$ ت. $5\cancel{R}3$

ii) عنصر هاي هريك ازمجموعه هاي زير را از C بيابيد:

الف. $\{x : 3Rx\}$ ب. $\{x : (4,x) \in R\}$

پ. $\{x : (x,2) \notin R\}$ ت. $\{x : xR5\}$

جواب: i) الف. درست   ب. نادرست   پ. نادرست   ت. درست

ii) الف. $\{1 , 4 , 5\}$ ب. $\emptyset$ پ. $\{2 , 3 , 4\}$ ت. $\{3\}$

4) فرض كنيد R رابطه اي بر $A = \{2,3,4,5,6\}$ باشد كه با ((x نسبت به y اول است))، يعني تنها مقسوم عليه مثبت x و y عدد 1 است، تعريف شده است

R را به صورت ست اي از جفت هاي مرتب بنويسيد.

جواب:

$$R=\{(2,3),(2,5),(3,2),(3,4),(3,5),(4,3),(4,5),(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(6,5)\}$$

5) فرض كنيد $E=\{1,2,3\}$ وروابط زير را روي E درنظر بگيريد:

$R_1=\{(1,2),(3,2),(2,2),(2,3)\}$

$R_2= \{(1,2),(2,3),(1,3)\}$

$R_3=\{(1,1),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)$

$R_4= \{(1,2)\}$

$R_5=E\times E$

كدام يك ازروابط فوق انعكاسي هستند؟

جواب : R_3 و R_5.

6) هريك ازعبارت زير يك رابطه R روي ست اعداد طبيعي، N، تعريف مي كند. كدام يك ازاين روابط متقارن هستند؟

الف. X، y را عاد مي كند.   ب. $X + y = 10$ پ. $X + 2y = 10$

جواب: الف. از اين كه $(2,4) \in R$ اما $(4,2) \notin R$ پس رابطه (الف) متقارن نيست.

ب. چون از $a + b = 10$ داريم $b + a = 10$ پس رابطه (ب) متقارن است.

پ. چون $(2,4) \in R$ زيرا $2+2(4)=10$ اما $(4,2) \notin R$ زيرا $4+2(2) \neq 10$ پس رابطه R در قسمت پ متقارن نيست.

7) آيا يك رابطه R روي ست اي غيرخالی مانند A مي تواند هم داراي خاصيت متقارن و هم ضد متقارن باشد.

جواب: بله رابطه R= {(a , a) : a∈ A} را درنظر بگيريد.

8) فرض كنيد W={1,2,3,4} و R={(2,2),(2,3),(1,4),(3,2)} رابطه اي روي w باشد. آيا R انتقالی است؟

جواب : خير، زيرا (3,2) ∈R و (2,3)∈R اما (3,3) ∉R.

9) هركدام ازعبارت هاي زير يك رابطه ی R روي ست اعداد طبيعي، N، تعريف مي كند. كدام يك از اين روابط انتقالی است؟

الف. X + y = 10   ب. X + 2y = 5

جواب: هيچ كدام از روابط الف وب انتقالی نيست. درالف داريم (2,8) ∈ R و(8,2)∈ R اما (2,2)∉ R و براي (ب) داريم (3,1) ∈ R و(1,3) ∈ R و (1,2) ∈ R اما (3,2) ∉ R.

تمرينات

سوال 1 : اگر A={1, 3, 5} و B={2, 4} باشد مطلوبست AxA و BxB و AxB و BxA

سوال 2: اگر A={a, b, c} و B={2, 4, 6} مطلوبست محاسبه ی AxB و BxA

سوال 3 : فرض كنيم A={1, 2} باشد، در اين صورت A^2 و A^3 را بيابيد. (می توان A^3 را به صورت A^2xA در نظر گرفت)

سوال 4 : گيريم كه A={1, 2} ، B={a, b, c} و C={c, d} ، در اين صورت:

الف : (AxB) ∩(AxC) و ب : Ax(B∩C) را بيابيد.

سوال 5 : گيريم كه A={a, b} ، B={1, 2} و c={3, 2} ، در اين صورت:

الف: (AxB) ∪(AxC) ، ب: Ax(B∪C) را بيابيد.

سوال 6 : فرض كنيم A ، B ، C و D ستها باشند، ثبوت نماييد كه:

الف : Ax(B∪C) = (AxB) ∪ (AxC)

ب : Ax(B∩C) = (AxB) ∩(AxC)

ج : $(AxB) \cap (CxD) = (A\cap C) \times (B\cap D)$

د : $(AxB) \cup (CxD) \subseteq (A\cup C) \times (B\cup D)$

سوال 7 : هرگاه $A=\{2, 4, 6, 8\}$ و $B=\{1, 9, 7\}$ و رابطه ی $R=\{(2, 1),(4,1),(6,7)\}$ از A در B تعریف شده باشد، در این صورت ناحیه ی تعریف و برد رابطه را به دست آرید.

سوال 8 : گیریم R رابطه ی از $A=\{1,2,3,4\}$ به $B=\{x, y, z\}$ باشد که با

$$R=\{(1, y),(1, z),(3, y),(4, x),(4, z)$$

تعریف شده است.

الف: ناحیه ی تعریف و ناحیه مقادیر R را تعیین کنید.
ب: رابطه ی معکوس R^{-1} از R را بیابید.

سوال 9 : گیریم که R رابطه ی "واقع در" از ست شهرها، x ، به ست کشورها، y ، باشد. هر یک از رابطه های زیر را در قالب کلمات بیان و مشخص کنید که بیانیه درست است یا نادرست.

الف: $R \in$ (فرانسه، پاریس)   ب: $R \in$ (ایتالیا، مسکو)

ج: $R \in$ (کانادا، واشینگتن)   د: $R \in$ (انگلستان، لندن)

الف: پاریس واقع در فرانسه است.

ب: مسکو واقع در ایتالیا است.

ج: واشینگتن واقع در کانادا است.

د: لندن واقع در انگلستان است.

سوال 10 : گیریم که R رابطه ی ((مجاور است با)) در ست کشور های جهان باشد. (کشور x مجاور است با کشور y اگر آنها مرز مشترک داشته باشند.) هر یک از رابطه های زیر را در قالب بیان مشخص نمایید که کدام بیانیه درست یا نادرست است.

الف: $R \in$ (اسپانیا و فرانسه)   ب: $R \in$ (مکزیک و کانادا)

ج: $R \notin$ (ژاپن و چین)   د: $R \notin$ (لهستان و آلمان)

سوال 11 : ست $A=\{2, 4, 6, 8\}$ را در نظر گرفته و خصوصیت متقارن بودن را در روابط ذیل تحقیق نمایید.

الف : $R_1=\{(2, 4),(6, 2),(4, 2),(2, 6),(8,8)$

ب : $R_2=\{(2, 4),(4,2),(8,6)\}$

ج : $R_3=\{(2, 2),(4, 4),(6, 6),(8,8)$

سوال 12 : توسط مثالی نشان دهید که رابطه ی کوچکتر یا مساوی در $\mathbb{R}$ خاصیت تقارنی ندارد.

سوال 13 : توسط مثالی نشان دهید که رابطه ی بخش پذیری در ست اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$)خاصیت تقارنی نیست.

سوال 14: ست $A=\{2, 5, 6, 7\}$ مفروض است ، نشان دهید که رابطه ی $R=\{(2, 5),(5, 2),(2, 2)$ انتقالی نیست.

سوال 15 : اگر $A=\{2, 4, 6\}$ باشد، نشان دهید که رابطه ی ذیل خاصیت ضد تقارنی را دارا می باشد.

$R_1= \{(2, 2),(4,4)$

سوال 16 : اگر $A=\{2, 4, 6\}$ باشد، نشان دهید که رابطه ی ذیل خاصیت ضد تقارنی را دارا نمی باشد.

الف : $R_1 = \{(2, 4),(4, 2)\}$

سوال 17 : رابط ی R روی $\mathbb{R}$ به صورت ذیل تعریف شده است، نشان دهید که این رابطه خاصیت ضد تقارنی دارد.

$$\forall x,y \in \mathbb{R}, xRy \Leftrightarrow 2x+3y=5$$

سوال 18 : نشان دهید که رابط ی بخش پذیری در ست اعداد طبیعی ($\mathbb{N}$) خاصیت انعکاسی دارد.

سوال 19 : نشان دهید رابطه ی زیر که روی Z تعریف شده است دارای خاصیت تقارنی است.

$$\forall x,y \in Z \ , \ xRy \Leftrightarrow x - y = 4k \ (k \in Z)$$

سوال 20 : گیریم $R=\{(1, 1),(1, 3),(3, 1),(3, 3)$. آیا R یک رابطه ی هم ارزی در $A=\{1, 2, 3\}$ است؟ در $B = \{1, 3\}$ چطور؟

سوال 21 : روی ست $A = \{1,2,3,4\}$ رابطه ی ترتیب جزیی $R = \{(a,b)|a\leq b\}$ را در نظر گرفته و دیاگرام آن را به دیاگرام هاس تبدیل کیند.

سوال 22 : فرض کنیم $A = \{1,2,3,4,5\}$ با رابطه ی ترتیب جزیی

$$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,5),(5,2),(1,2),(4,5),(4,2)$$

باشد، دیاگرام هاس این ست مرتب جزیی را بیابید.

سوال 23 : اگر D_{30} ست مقسوم علیه های مثبت عدد 30 باشد و R رابطه ی عاد کردن ، آنگاه دیاگرام هاس این ست مرتب را رسم نمایید.

سوال 24 : اگر A={a,b,c} باشد، آنگاه دیاگرام هاس $(p(A),\subseteq)$ را رسم نمایید.

سوال 25: رابطه ی عاد کردن را در هر یک از ست های زیر در نظر گرفته و از روی دیاگرام هاس آن ها ، عناصر مینیمال ، ماکسیمال ، مینیمم و ماکسیمم را بیابید.
الف) A= {2,4,6,8} ب) B = {2,3,4,12}

سوال 26: فرض می کنیم S = {2,4,6,12,20} با رابطه ی بخش پذیری مرتب شده باشد. عناصر ماکسیمال و مینیمال S را پیدا کنید.

سوال 27 : فرض کنید T = {2,3,4,16} با رابطه ی بخش پذیری مرتب شده باشد. عناصر ماکسیمال و مینمال T را پیدا کنید.

سوال 28: فرض کنیم ست S = {3,6,9,12,18} با رابطه ی بخش پذیری مرتب شده باشد. برای کدام سب ست های S ، {6,12,18} ست کران های بالای ست است؟

سوال 29 : برای کدام سب ست های S در مثال 30 ، {3,6} ست کران پایین است؟

سوال 30 : تعیین کنید که هر یک از ست های زیر نسبت به رابطه ی بخش پذیری یک مشبکه(شبکه) است یا نیست: A = {2,3,4,12} و B = {1,2,3,9,18}

سوال 31 : تعیین کنید که هر یک از ست های زیر نسبت به رابطه ی بخش پذیری مشبکه است یا نیست:
C = {1,3,4,9} و D = {1,2,3,9,18}

فصل چهارم

جبربول و کاربرد های آن

مقدمه

دراین فصل یک دستگاه جبری را معرفی می کنیم که ساختارآن به دوعملکرد دو تایی وابسته است. این دستگاه جبری به افتخار ریاضی دان انگلیسی جرج بول، جبربول نامیده می شود. درجبربول بیشتر ازآن که به ساختار مجرد دستگاه توجه شود به ماهیت کاربردی آن تکیه می شود. درسال1854 جرج بول یک دستگاه جبری را براساس منطق ریاضی بسط و توسعه داد که امروزه جبربولی نامیده می شود. درسال 1983 کلود شانون توابع کلیدی را معرفی نمود و نشان داد که ساختار این توابع به کارهای بول وابسته است. این ارتباط نشان می دهد که چگونه یک مفهوم مجرد ریاضی درقرن نوزدهم به یک مفهوم کاربردی درقرن بیستم تبدیل شد

در این فصل به معرفی جبربولی، خواص جبربولی، عملیات روی یک جبربولی پرداخته و سپس، توابع بولی ، دریچه های منطقی ، مدار های منطقی و نقشه ها ی کارنو را با مثال ها و تمرینات زیاد مورد بحث و بررسی قرار می دهیم.

جبربولي

فرض کنید B ست خالی است که روی آن سه عملگر " جمع +" ، "ضرب. " و" مکمل گيري ' " و عناصر متمايز 0 و 1 تعریف شده است. در این صورت B را يك جبربولي مي ناميم که اگر برای هر عضو دلخواه a ، b و c از ست B شرایط زیر صدق کند.

1)خاصيت تبدیلی یا جابه جايي: براي هر$a,b\in B$:

الف. $a+b=b+a$ ب. $a.b=b.a$

2) خاصيت شرکت پذيري: براي هر$a,b,c\in B$

الف. $(a+b)+c=a+(b+c)$

ب) $(a.b).\ c=a.\ (b.c)$

3) خاصيت توزيع پذيري: براي هر $a,b,c\in R$

الف. $a+(b.c)=(a+b).(a+c)$

ب. $a.(b+c)=(a.b)+(a.c)$

4) خاصيت عينيت يا هماني: براي هر $a\epsilon B$

الف. $a+0=a$ ب. $a.1=a$

5) خاصيت مكمل سازي: براي هر $a \epsilon B$ يك $a' \epsilon B$ وجود دارد به طور كه :

الف. $a+a' =1$ ب. $a.a' =0$

خواص پنج گانه فوق در يك جبربولي را اصل مي ناميم و ساير روابط در يك جبر بولي ر ابه كمك اين اصول به دست مي آوريم.

توجه: الف. معمولاً $x.y$ را با نماد xy نشان مي دهيم.

ب. در يك جبربولي 0 را عضو عينيت جمع و 1 راعضو عينيت ضرب مي ناميم.

پ. جبربولي B با اعمال "+ ، . ،' " رابه صورت $(B;+ , . , ')$ و يا به طور خلاصه با خود B نشان مي دهيم.

مثال 1 : هرگاه B را كلاس ست ها و اعمال جمع وضرب را به ترتيب با اجتماع واشتراك ست ها وعمل مكمل گيري ست ها درنظر گرفته وست خالی Ø ومرجع U را به عنوان عناصر متمايز 0 و1 درنظر بگيريم، دراين صورت B با اين اعمال يك جبر بولي است. زيرا براي $A,B,C\epsilon B$ داريم:

1. $AUB=BUA\ ,\ A\cap B=B\cap A$
2. $(AUB)UC=AU(BUC),\ (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
3. $AU(B\cap C)=(AUB)\cap(AUB)\ ,A\cap(BUC)=(A\cap B)U(A\cap C)$
4. $AU\emptyset=A\ ,\ A\cap U=A$
5. $AUA' =U\ ,\ A\cap A'=\emptyset$

كه در آن A' مكمل ست A، نسبت به ست مرجع U است. B با اعمال فوق **جبر بولي ست ها** ناميده مي شود. □

مثال 2: اگر $B=\{0, 1\}$ و اعمال جمع+ و ضرب. را به صورت زير تعريف كنيم:

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

همچنين عمل مكمل گيري رابه صورت:

$1'=0$ ، $0'=1$

تعريف كنيم، دراين صورت B با اين اعمال يك جبر بولي است. □

مثال 3: هرگاه B را ست بيانيه ها و اعمال جمع و ضرب را به ترتيب با اعمال منطقي فاصل$\vee$ وعاطف $\wedge$ وهم چنين عمل مكمل گيري را با عمل نقيض گيري(~) بيانيه ها تعريف و بيانيه هميشه راستT را به عنوان 1 و بيانيه هميشه دروغ F را به عنوان 0 در نظر بگيريم در اين صورت B با اين اعمال يك جبربولي است، زيرا براي بيانيه هاي $p,q,r \in B$ داريم:

1. $p\vee q=q\vee p\ ,\ p\wedge q=q\wedge p$
2. $(p\vee p)\vee r=p\vee(q\vee r)\ ,\ (p\wedge q)\wedge r=p\wedge(q\wedge r)$
3. $p\vee(q\wedge r)=(p\vee q)\wedge(p\vee r),\quad p\wedge(q\vee r)=(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
4. $p\vee F=p\quad ,\ p\wedge T=p$
5. $p\vee(\sim p)=T\quad ,p\wedge(\sim p)=F$

كه درآن $(\sim P)$ نقيض بيانيه p است.B با اعمال بيان شده **جبربولي بيانيه ها** ناميده مي شود. □

تعريف: (دوگاني) هرگاه عبارتي ازعناصر يك جبربولي داده شده باشد، عبارتي راكه از تعويض+ به . ، . به + وهم چنين تعويض 1 به 0 وتعويض 0 به 1 حاصل مي شود دوگان عبارت داده شده مي ناميم.

مثال 4 : دوگان $a+a'=1$ عبارت است از $aa'=0$ و دوگان عبارت

$$(1+a)(b+0)=b$$

عبارت است از: $(0a)+(b1)=b$ □

اصل دوگاني. در يك جبربولي ، دوگان هر قضيه نيز يك قضيه است.

به منظور نشان دادن به كارگيري اصل دوگاني وهم چنين ساير روابطي كه در يك جبر بولي وجود دارد، قانون زير را كه قانون **خود تواني** نام دارد، درنظر بگيريد:

$$x=x+x \qquad , \qquad x=xx$$

توجه كنيد كه هر كدام از روابط بالا دوگان ديگري است. اين قوانين را به عنوان اصول نمي پذيريم، زيرا اين روابط مي توانند از اصول پنج گانه بيان شده به دست آيند. قضاياي زير را در نظر بگيريد؛ در تمام اين قضايا $(B;+,.,')$ يك جبر بولي است.

قضيه:(خود تواني) براي هر $x\in B$:

الف. $x=xx$ ب. $x=x+x$

اثبات: الف.

(بنابر خاصيت هماني) $xx=xx+0$

(بنابر خاصيت مكمل سازي) $=xx+xx'$

(بنابر خاصيت توزيع پذيري) $=x(x+x')$

(بنابر خاصيت مكمل سازي) $=x.1$

(بنابر خاصيت عضو هماني) $=x$

بنابراين: $xx=x$.

ب. با اين كه با استفاده از اصل دوگاني قسمت (ب) اثبات مي شود. اما به طور جدا گانه و با استفاده از اصول پنج گانه قسمت(ب) را نيز مي توان اثبات نمود.

(بنابر خاصيت هماني) $x+x=(x+x).1$

(بنابر خاصيت مكمل سازي) $=(x+x).(x+x')$

(بنابر خاصيت توزيع پذيري) $=x+x.x'$

(بنابر خاصيت مكمل سازي) $=x+0$

(بنابر خاصيت عضوهماني) $=x$

بنابراين $x+x=x$.

توجه: هرگاه اثبات قسمت هاي (الف) و (ب) درقضيه فوق را به طور جدا گانه مورد بررسي قرار دهيم، مشاهده مي كنيم درهر مرحله از اثبات قسمت هاي "الف" و"ب" روابطي كه مورد استفاده قرار گرفته اند، دوگان يكديگر هستند.

مثال5: قانون خود تواني در مورد جبر بولي ست ها وجبر بولي بيانيه ها به صورت زيراست:

الف: $A\cup A=A \quad ,A\cap A=A$

ب: براي بيانيه ها $p\vee p=p \ , p\wedge p=p$ □

درقضاياي زير، تنها يك قسمت از قضيه اثبات مي شود و قسمت دوم با استفاده از قسمت اول قضيه و اصل دوگاني قابل اثبات خواهد بود.

قضيه تسلط: براي هر $x \in B$

الف. $x+1 = 1$ **ب.** $X.\, 0 = 0$

اثبات: الف.

(بنابرخاصيت عضوهماني) $x+1=(x+1)\,.1$

(بنابر خاصيت مكمل سازي) $=(x+1)\,.(x+x')$

(بنابر خاصيت جابه جايي) $=(x+x')\,.(x+1)$

(بنابر خاصيت توزيع پذيري) $=x+(x'\,.\,1)$

(بنابر خاصيت عضو هماني) $=x+x'$

(بنابر خاصيت مكمل سازي) $=1$

ب. با استفاده ازقسمت" الف " وبنابر اصل دوگاني قسمت " ب" به سادگي اثبات مي شود. □

مثال 6: قانون تسلط براي جبربولي ست ها وجبربولي بيانيه ها به صورت زير است:

الف) براي ست ها: $A \cup U = U \quad , \quad A \cap \emptyset = \emptyset$

ب) براي بيانيه ها: $p \vee T = T \quad , \quad P \wedge F = F$ □

قضيه يكتايي مكمل: براي هر $x \in B$ تنها يك $x' \in B$ وجود دارد كه

$$x+x' = 1 \quad , \quad x.\, x' = 0$$

اثبات: فرض كنيد دوعضو $w, z \in B$ وجود دارند به طوري كه :

$$xz = 0 \quad , \quad x+z = 1$$

و $xw = 0 \quad , \quad x+w = 1$

يعني w و z مكمل هاي x هستند. چون :

(بنابرخاصيت عضو هماني) $z = z + 0$

(بنابر $xw = 0$) $= z+xw$

(بنابرخاصيت توزيع پذيري) $=(z+x)\,.(z+w)$

$=1.(z+w)$ (بنابر $x+z=1$)

$=z+w$ (بنابر خاصيت هماني)

همچنين با عملياتي مشابه براي w خواهيم داشت:

$w=w+0$ (بنابرخاصيت هماني)

$=w+xz$ (بنابر $xz=0$)

$=(w+x).(w+z)$ (بنابر خاصيت توزيع پذيري)

$=1.(w+z)$ (بنابر $w+x=1$)

$=w+z$ (بنابر خاصيت هماني)

بنابراين : $z=z+w=w+z=w$

در نتيجه دو مكمل x در واقع يكي هستند و ما اين مكمل يكتاي x را با x' نشان مي دهيم.

قضيه مكمل مكمل : براي $x \in B$ داريم:

$$(x')'=x$$

اثبات : بنابر اصول مكمل سازي و جابه جايي داريم:

$X.x'=x'.x=0$

و $x+x'=x'+x=1$

بنابر اين x مكمل يكتاي x' است ، به عبارت ديگر

$x=(x')'$ □

قضيه جذب: براي $x,y \in B$ داريم:

الف. $x+(x.y)=x$ ب. $x.(x+y)=x$

اثبات: الف.

$x+(xy)=x.1+xy$ (بنابر خاصيت عضوهماني)

$=x(1+y)$ (بنابر خاصيت توزيع پذيري)

$=x.1$ (بنابر خاصيت تسلط)

$=x$ (بنابر خاصيت هماني)

بنابراین: $x + xy = x$.

ب. بنابر اصل دوگاني و قسمت" الف" به سادگي اثبات مي شود که $x.(x+y) = x$ □

مثال7: قوانین جذب براي جبر بولي ست ها و جبربولي بیانیه ها به صورت زیر است:

الف. براي ست ها:

$$A\cup(A\cap B)=A \quad , \quad A\cap(A\cup B)=A$$

ب. براي بیانیه ها :

$$P \vee (p \wedge r) = p \quad , \quad p \wedge (p \vee r) = p \quad \square$$

قضیه (قوانین دمورگان) : براي $x , y \in B$ داریم:

الف. $(x+y)' = x'y'$ **ب.** $(xy)' = x'+y'$

اثبات : الف. بنابر یکتایي مکمل، کافي است نشان دهیم

$$(x+y) + x'y' = 1 \quad \text{و} \quad (x+y).x'y' = 0$$

یعني نشان دهیم $x'y'$ مکمل $x+y$ است. به منظور نشان دادن $(x+y) . x'y' = 0$ داریم:

$$(x+y)\, x'y' = x'y'\,(x+y) = x'y'x + x'y'y$$
$$= x'xy' + x'.0$$
$$= 0 . y' + 0 = 0$$

همچنین:

$$(x+y)+x'y' = (x+y+x') . (x+y+y')$$
$$= (x+x'+y) . (x+1) = (1+y) . 1 = 1+y = 1$$

بنابراین:

$$(x+y)' = x'y'$$

ب. با استفاده از اصل دوگاني و قسمت " الف" به سادگي قسمت " ب" اثبات مي شود. □

مثال 8: قوانین دمورگان براي جبر بولي ست ها وجبر بولي بیانیه ها به صورت زیر است:

الف. براي ست ها:

$$(A\cup B)' = A' \cap B' \quad , \quad (A\cap B)' = A'\cup B'$$

ب. براي بیانیه ها:

$$\sim(p \vee q) = (\sim p)\wedge(\sim q) \;, \; \sim(p\wedge q) = (\sim p)\vee(\sim q) \quad \square$$

باستفاده از قضاياي بالا مي توان خواص(قضاياي) دیگري از یك جبربولي را اثبات نمود، براي این منظور به ذکر چند مثال مي پردازیم.

مثال 9: نشان دهید $0' = 1$

حل: $0' = 0'+0 = 0 + 0' = 1$

هم چنین بنابر خاصیت دوگاني داریم $1' = 0$. □

مثال 10: نشان دهید $(x+y)(x+z)(x'y)'=x$

حل:

(خاصیت توزیع پذیري) $(x+y)(x+z)(x'y)' =(x+yz)(x'y)'$

(قانون دمورگان و مکمل مکمل) $=(x+yz)(x+y')$

(توزیع پذیري) $=x+(yz)y'$

(جا به جایي) $=x+y'(yz)$

(شرکت پذیري) $=x+(y'y)z$

(مکمل سازي) $=x+ 0z$

(خاصیت هماني) $=x + 0 =x$

مثال 11: نشان دهید هرگاه $xy' = 0$ دراین صورت $xy = x$

حل: (خاصیت هماني) $xy = xy+ 0$

(طبق فرض مسأله) $=xy + xy'$

(توزیع پذیري) $=x(y +y')$

(مکمل سازي وهماني) $=x .1=x$

□

مثال زیر نشان میدهد که یك جبربولي با سه عضو وجود ندارد.

مثال12 : نشا ن دهید هرگاه B داراي سه عضوباشد، آنگاه $(B;+ , . , ')$ نمي تواند یك جبربولي باشد.

حل: B باید به صورت $B=\{0 ,1 ,x\}$ باشد، مکمل x یعني x' نمي تواند 0 یا 1 باشد، زیرا 0 و1 مکمل هاي یکتاي یکدیگرند، بنابراین فقط حالت $x = x'$ ، امکان دارد. دراین صورت:

$$x = xx = xx' = 0$$

بنابراین $x = 0$ و این امکان پذیر نیست چون B داراي سه عضو است(اعضاي آن متمایزند) لذا $(B; + ,.,')$ نمي تواند یك جبر بولي باشد. □

مجموعه مسائل

1) D_{30} را ست مقسوم عليه هاي 30 درنظر بگيريد، يعني

$D_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$

جمع و ضرب و مكمل گيري يا + و ⁕ و ′ را به صورت زير تعريف مي كنيم:

براي $a,b \in D_{30}$

$a⁕b = gcd(a,b)$ (بزرگترين مقسوم عليه مشترك)

$a+b = 1cm\ (a,b)$ (كوچكترين مضرب مشترك)

$a' = 30/a$

دراين صورت نشان دهيد D_{30} بااعمال فوق يك جبربولي است. مطلوب است:

الف .مكمل 3 و 15 و 30 ب. محاسبه عبارت $(2+15)⁕5$

ج. 0 و 1 اين جبربولي.

جواب: الف. 10 ،2 و1 ب. 5 ج. 1 و 30

2) مانند مسأله قبل D_{70} را ست مقسوم عليه هاي 70 در نظر بگيريد باهمان جمع و ضرب تعريف شده در مسأله 1 و عمل مكمل گيري به صورت $a' = 70/a$. مقدار هريك ازعبارت هاي زير را به دست آوريد.

الف. $35⁕(2+7)'$ ب . $(35⁕10) + 14'$

ج. $(2+7)⁕(14⁕10)'$

جواب: الف. 5 ب. 5 ج. 7

3) هرگاه x وy وz اعضاي يك جبربولي باشند نشان دهيد

$((x+y)'(xz)')' + yz = x+y$

عبارات وتوابع بولي

هدف اصلي اين بخش معرفي آن دسته از اصطلاحات و ايده هاي رياضي است، كه در به كارگيري روش هاي جبر بولي در طراحي و تجزيه و تحليل مدار هاي منطقي مورد استفاده قرار مي گيرند.

تعریف: متغیر بولي حرف یا نمادي است مانند... $x, y, z,$ که نمایانگر عضوغیر مشخصی از یك جبر بولي است وآن را به اختصار متغیر مي نامیم.

تعریف: یك عبارت بولي با n متغیر $x_1 ,\dots, x_n$ رابه صورت بازگشتي زیر تعریف مي کنیم:

الف: نماد هاي 0 ، 1 و $x_1, ..., x_n$ عبارت هاي بولي از $x_1 , \dots ,x_n$ هستند.

ب. هرگاه E_1 وE_2 عبارت هاي بولي از $x_1,\dots, x_n$ باشند دراین صورت E_1+E_2, E_1E_2 و E'_1 نیز عبارت هاي بولي هستند.

مثال13: عبارت هاي زیر، چهار عبارت بولي ازمتغیر هاي x,y,z هستند:

$$(x+ y) . (x'+z) .1$$

$$(x' .z) + (x'.y) +z'$$

$$X+y$$

$$Z$$

دوعبارت اول شامل هر سه متغیر هستند، درحالي که دوعبارت آخر به ترتیب شامل دو متغیر و یك متغیر هستند.

مثال 14: عبارت زیر یك عبارت بولي n متغیره است.

$$(x_1,x_2\dots x_n)+ (\acute{x}_{\acute{1}}\, x_2\dots x_n)+(x_1\acute{x}_2\dots x_n)$$

تعریف: فرض کنید A ست ای ناتهی باشد، منظور از A^n یا $\overbrace{AXAX\dots XA}^{n\text{ مرتبه}}$ مجموعه تمام n تایی های مرتب $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ است به طوری که $a_i \in A$ برای هر i یعنی

$$A^n = \{(a_1, \dots,a_n) : a_i \in A ,\ 1\leq i \leq n\}$$

مثال 15: هرگاه $B=\{0,1\}$ در این صورت B^3 عبارت است از:

$$B^3 = \{(b_1, b_2, b_3) : b_i\in\{0 , 1\} ,\quad i=1,2,3,\}$$

$B^3=\{(0,0,0), ((0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$ و یا

تعریف: هرگاه f یک عبارت بولی n متغیر ازمتغیرهای جبر بولی B باشد، در این صورت تابع زیر یک **تابع بولی** را تعریف می کند

$$f : B^n \rightarrow B$$

معمولاً f را به صورت $f(x_1, \ldots ,x_n)$ نشان داده و آن را تابعی n متغیره روی B می نامیم.

تذکر: تابع بولی را تابع کلیدی نیز می نامیم.

مثال 16: هرگاه $B = \{0,1\}$ در این صورت تابع $f : B^3 \rightarrow B$ با ضابطه:

$$F(x ,y,z)= x'z+x'y+z'$$

یک تابع بولی است.

بطور غیر رسمی توابع بولی، به صورت چند جمله ای های (n متغیره) ازثابت ها ومتغیر های جبر بولی ومکمل های آن ها نوشته می شوند. مانند:

$$a' + xy \;,\; ax + bx'y + xy'z \;, ax'y+ bxy'$$

که درآن ها a وb ثابت وx, y و z متغیر های یک جبر بولی هستند. توجه کنید که در مقایسه با چند جمله ای ها، تنها ثابت ها درتوابع بولی عبارتند از 0 و 1 و به دلیل قانون خود توانی درجبربولی، توان هیچ متغیری دریک تابع بولی نمی تواند بیشتر ازیک باشد.

توجه: به علت وجود قوانین دمورگان، جذب و سایر خواص یک جبربولی، برای یک تابع بولی یک عبارت منحصر به فرد وجود ندارد. با این حال میتوان یک شکل استاندارد یا شکل متعارفی برای توابع بولی تعریف نمود.

قضیه: هرگاه B یک جبر بولی وf تابعی یک متغیره روی B باشد، آن گاه

$$f(x) = f(1)\, x+f(0)x'$$

اثبات: در هر جبربولی روابط زیر برقرار است:

$$a = ax + ax' \qquad (a)$$

$$x = 1.x + 0.x' \qquad (b)$$

$$x'=0.x+1.x' \qquad (c)$$

برای تابع بولی f حالت های زیر ممکن است:

الف. هرگاه f تابعی ثابت باشد به عبارت دیگر برای هر $x\in B$ داشته باشیم:

$$f(x) = k$$

دراین صورت با توجه به رابطه (a) داریم:

$$K = kx + k\acute{x}$$

و یا
$$f(x) = f(1)x+f(0)\acute{x}$$

ب. هرگاه برای هر $x\in B$ داشته باشیم:

$$f(x)=x$$

دراین صورت بنابر (b) داریم:

$$X = 1.x + 0.\acute{x}$$

ویا
$$f(x) = f(1)x + f(0)\acute{x}$$

پ. هرگاه برای هر $x\in B$ داشته باشیم:

$$f(x) = \acute{x}$$

دراین صورت بنابر (c) داریم:

$$\acute{X} = 0.x + 1.\acute{x}$$

و یا
$$f(x) = f(1)x+ f(0)\acute{x}$$

زیرا $f(1) = 1' = 0$ و $f(0) = 0' = 1$.

ت. فرض کنید توابع h و g به شکل ترکیبی از x و $\acute{x}$ بوده وبرای هر$x\in B$ داشته باشیم

$$f(x) = h(x) + g(x)$$

بنابرقسمت های قبل داریم:

$$h(x) = h(1)x + h(0)\acute{x}$$

$$g(x)=g(1)x +g(0)\acute{x}$$

واز آنجا

$$h(x) + g(x) = h(1)x + h(0)\acute{x} + g(1)x + g(0)\acute{x}$$

$$= h(1)x + g(1)x + h(0)\acute{x} + g(0)\acute{x} \quad \text{(جابجایی)}$$

$$= (h(1) + g(1))x + (h(0) + g(0))\acute{x} \quad \text{(توزیع پذیری)}$$

$$= f(1)x + f(0)\acute{x}$$

بنابراین $f(x) = f(1)x + f(0)\acute{x}$

ث. هرگاه h و g توابع تعریف شده درقسمت ت باشند وبرای هر $x \in B$ داشته باشیم:

$$f(x) = h(x)g(x)$$

دراین صورت:

$$h(x)g(x) = (h(1)x + h(0)\acute{x})(g(1)x + g(0)\acute{x})$$

$$= h(1)x(g(1)x + g(0)\acute{x}) + h(0)\acute{x}(g(1)x + g(0)x')$$

$$= h(1)xg(1)x + h(1)xg(0)\acute{x} + h(0)\acute{x}g(1)x + h(0)\acute{x}g(0)\acute{x}$$

بنابر خواص جابه جایی و خود توانی و این که $x.\acute{x} = 0$ داریم:

$$f(x) = h(x)g(x) = h(1)g(1)x + h(0)g(0)\acute{x}$$

$$= f(1)x + f(0)\acute{x}$$

بنابراین برای تابع یک متغیره $f(x)$ داریم:

$$f(x) = (1)x + f(0)\acute{x} \qquad \square$$

نتیجه1: هرگاه f یک تابع دومتغیره از x_1 و x_2 روی جبربولی B باشد، دراین صورت

$$f(x_1, x_2) = f(1,1)x_1x_2 + f(1,0)x_1\acute{x}_2 + f(0,1)\acute{x}_1x_2 + f(0,0)\acute{x}_1\acute{x}_2$$

اثبات: ابتدا با فرض ثابت بودن x_2 و استفاده از یکی از قضایای قبلی خواهیم داشت:

$$f(x_1, x_2) = f(1, x_2)x_1 + f(0, x_2)\acute{x}_1 \qquad (a)$$

مجدداً با استفاده ازقضیه قبلی خواهیم داشت:

$$f(1, x_2) = f(1,1)x_2 = f(1,0)\ \acute{x}_2 \qquad (b$$

$$f(0, x2) = f(0,1)x_2 + f(0,0)\acute{x}_2 \qquad (c$$

با جای گذاری (b) و(c) در (a) داریم:

$$f(x_1, x_2) = f(1,1)x_1x_2 + f(1,0)x_1\acute{x}_2 + f(0,1)\acute{x}_1x_2 + f(0,0)\acute{x}_1\acute{x}_2$$

شکل های نوشته شده برای توابع یک متغیره و دومتغیره در قضیه فوق و نتیجهٔ آن را شکل متعارفی یک تابع بولی می نامیم و برای یک تابع n متغیره شکل متعارفی ذیلاً معرفی می شود.

نتیجه 2: شکل متعارفی توابع n متغیره: با استفاده از روش استقراری ریاضی و روندی مشابه با روند اثبات به کاررفته در نتیجه 1، هرگاه f یک تابع بولی n متغیره از $x_1,x_2,\ldots,x_n$ روی جبربولی B باشد آ ن گاه شکل متعارفی f به صورت زیر بیان می شود.

$$f(x_1 ,x_2,\ldots,x_n)=\sum f_{e1e2\ldots en}\, x_1^{e1}x_2^{e2}\ldots x_n^{en}$$

که در آن برای $i=1,\ldots,n$ داریم : $e_i = 0$ یا $e_i =1$ و

$$f_{e1e2\ldots en} =f(e_1,e_2,\ldots,e_n)$$

همچنین

$$x_i^{ei} =\begin{cases} xi & , \quad ei = 1 \\ \acute{x}i & , \quad ei = 0 \end{cases} \text{اگر}$$

و مجموع بیان شده روی تمام 2^n ترکیب از مقادیر e_i گرفته می شود . □

مثال 17 : شکل متعارفی یک تابع دو متغیره بیان شده در نتیجه 1 به صورت زیر بیان می شود

$$f(x1, x2)= f_{11}x_1x_2+f_{10}x_1\acute{x}_2+f_{01}\acute{x}_1x_2+f_{00}\acute{x}_1\acute{x}_2 \qquad \square$$

مثال 18: شکل متعارفی یک تابع سه متغیره به صورت زیر است که

$$f(x_1,x_2,x_3)=f_{111}x_1x_2x_3+f_{110}x_1x_2\acute{x}_3+f_{101}x_1\acute{x}_2x_3$$
$$+f_{011}\acute{x}_1x_2x_3+f_{100}\, x_1\, \acute{x}_2\acute{x}_3+f_{010}\acute{x}_1x_2\acute{x}_3$$
$$+f_{001}\acute{x}_1\acute{x}_2x_3+f_{000}\acute{x}_1\acute{x}_2\acute{x}_3 \qquad \square$$

مثال 19: فرض کنید $B= \{0,a,\acute{a},1\}$ شکل متعارفی یک تابع دومتغیره $f(x,y)$ را که مقادیر آن در جدول زیر داده شده است تعیین کنید:

y	f(x,y)
0	a
1	0
0	á
1	1

حل: شکل متعارفی $f(x,y)$ عبارت است از:

$$f(x,y) =f_{11}xy+f_{10}x\acute{y}+f_{01}\acute{x}y+f_{00}\acute{x}\acute{y}$$

با توجه به جدول داده شده داریم:

$$f(x,y)=1.xy+a'xy'+0.x'y+ax'y'=xy+a'xy'+ax'y'$$

مثال 20: هرگاه $B=\{0,1,a,a'\}$ یک جبربولی باشد، شکل متعارفی تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ را که مقادیر آن در جدول زیر داده شده است تعیین کنید:

x y z	f(x,y,z)
0 0 0	a'
0 0 1	0
0 1 0	a'
0 1 1	1
1 0 0	a
1 0 1	0
1 1 0	a
1 1 1	1

حل: شکل متعارفی f عبارت است از:

$$f(x,y,z)=f_{111}xyz+f_{110}xyz'+f_{101}xy'z+f_{100}xy'z'+f_{011}x'yz$$
$$+f_{010}x'yz'+f_{001}x'y'z+f_{000}x'y'z'$$

وبا استفاده از جدول داریم:

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=a'x'y'z'+0.x'y'z+a'x'yz'+1.x'yz+axy'z'\\&+0.xy'z+axyz'+1.xyz\\&=a'x'y'z'+a'x'yz'+x'yz+axy'z'+axyz'+xyz\end{aligned}$$

مجموعه مسائل

1) یک جبربولی چهارعضوی را در نظر بگیرید. تعداد توابع بولی (در صورت وجود) بر این جبر بولی را تعیین کنید که مشخصات آن ها در جدول های زیر داده شده است.

x	y	f(x,y)
a	á	a
a	1	a
1	á	a
0	a	a

(الف)

x	y	f(x,y)
0	a	0
1	a	1
á	0	á
a	á	a

(ب)

x	y	z	f (x,y,z)
0	0	0	á
0	0	1	0
0	1	0	á
0	1	1	1
1	0	0	a
1	0	1	0
1	1	0	á
1	1	1	1

(پ)

x	y	z	f(x,y,z)
0	1	a	1
á	a	0	0
1	a	0	0
á	1	1	1
a	1	a	0
0	á	1	á
0	1	á	a
1	1	1	0

(ت)

x	y	z	f(x,y,z)
á	0	1	a
0	a´	a	a
á	1	a	a
a	0	á	á
a	a	a	á
1	0	1	1
á	0	a	1
0	a	á	0

(ث)

مدارها و توابع کلیدی

قطعات الکتریکی و الکترونیکی زیادی وجود دارند که طبیعی دوحالتی یا دو وضعیتی به صورت " خاموش- روشن" دارند، مانند کلید یک لامپ، دکمه کنترولی یک آسانسور، کلیدی خاموش- روشن یک رادیو، این قطعات (کلیدها و دکمه ها) که ماشین ها (لامپ، آسانسور، رادیو) را کنترول می کنند، رقمی نامیده می شوند.

به خاطر ارزانی و سادگی ساخت عناصر دوحالتی الکتریکی و الکترومغناطیسی، درواقع تمام مدارها برای کامپیوتر های رقمی بر پایه جبربولی دوعضوی یعنی $B=\{0,1\}$ طراحی شده اند.

البته طراحی واقعی عناصر کامپیوتر به عوامل بسیار دیگری غیراز جبربولی نیاز دارد.

دراین قسمت به عنوان کاربردی از جبربولی، مدارها و توابع کلیدی را بررسی می کنیم. همواره فرض می کنیم $B=\{0,1\}$. ابتدا جدول ارزشی را برای توابع بولی معرفی می نماییم.

جدول ارزشی برای یک تابع بولی

هرگاه $x \in B$ رابطه بین x و $x́$ را می توان به وسیله یک نمودار، که آن را جدول ارزشی می نامیم نشان داد. این جدول عبارت است از:

x	$\acute{x}$
0	1
1	0

جدول فوق نشان می دهد که هرگاه $X=0$ آن گاه $\acute{x}=1$ و هرگاه $x=1$ خواهیم د اشت $\acute{x}=0$ هم چنین برای $x,y\epsilon B$ جدول ارزشی برای بیان روابط این متغیر ها و توابع $f(x,y)=xy$ و $g(x,y)=x+y$ به صورت زیر خواهد بود:

x y	f	g
0 0	0	0
0 1	0	1
1 0	0	1
1 1	1	1

مثال 21: فرض کنید $f : B^3 \rightarrow B$ با ضابطه $f(x,y,z) = xy+z$ تعریف شده باشد، جدول ارزشی برای این تابع به صورت زیر بیان می شود:

x	y	z	xy	f
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

تعریف : برای $n\geq 2$ فرض کنید.

$$f : B^n \to B \quad \text{و} \quad g: B^n \to B$$

دو تابع بولی n متغیره باشند. f و g را مساوی گوییم و آن را با نماد $f=g$ نشان میدهیم هرگاه ستون های متناظر f و g در جدول ارزشی یکسان باشند.

مثال 22: فرض کنید.

$$g(x,y) = \acute{x}(x+\acute{x}y) \qquad , \qquad f(x, y)= \acute{x}y$$

باستفاده از جدول ارزشی نشان دهید f و g مساوی هستند.

حل:

x y	$\acute{x}$	$\acute{x}y$	$x+\acute{x}y$	$f=\acute{x}y$	$g=\acute{x}(x+\acute{x}y)$
0 0	1	0	0	0	0
0 1	1	1	1	1	1
1 0	0	0	1	0	0
1 1	0	0	1	0	0

چون ستون های متناظر با f و g یکسان هستند لذا $f=g$. □

مثال 23: برای جدول زیر توابع f،g و h را بیابید.

x y z	f	g	h
000	0	0	0
001	1	0	1
010	0	0	0
011	0	0	0
100	0	1	1
101	0	0	0
110	0	0	0
111	0	0	0

حل: برای ستون متناظر با f می خواهیم مقدار تابع برای حالتی که $x=y=0$ و $z=1$ برابر 1 در بقیه حالت *ها* برابر 0 باشد، تابع $f(x,y,z)=\acute{x}\acute{y}z$ چنین تابعی را بیان می کند. به طریق مشابه $g(x,y,z)=x\acute{y}\acute{z}$ دارای مقدار 1 است هرگاه $x=1$ و $y=z=0$ و دربقیه حالت ها برابر 0 است .چون توابع f و g تنها در یک حالت مقدار 1 دارند و این حالت ها برای هر تابع متمایز از دیگری است، مجموع آنها یعنی $f+g$ تنها در این دو حالت مقدار1 را دارد. بنابراین:

$$h(x,y,z)=f(x,y,z)+g(x,y,z)=\acute{x}\acute{y}z+x\acute{y}\acute{z}$$

دارای ستونی در جدول ارزشی خواهد *بود که متناظر ستون* h در جدول داده شده است. □

در مورد توابع g, f *و* h *مثال* 23 *که همگی توابع سه متغیره بودند، هرسه متغیر یا مکمل آن ها در هرعبارت وجود داشتند مثلاً* $g(x,y,z)=x\acute{y}\acute{z}$ *که این تابع شامل* x*، مکمل* y *و مکمل* z *است. حال فرض کنید* $K(x,y,z)=xy$ *در این صورت با استفاده از خاصیت همانی بودن 1 برای ضرب داریم:*

$$K(x,y,z)=xy.1=xy.(z+\acute{z})$$

واز آن با استفاده از خاصیت توزیع پذیری داریم:

$$K(x,y,z) =xyz + xy\acute{z}$$

یعنی هرعبارت حاصل ضربی *در تابع* K، شامل سه متغیر یا مکمل آن ها است. این مطلب ما را به تعریف زیر می رساند.

تعریف: هرگاه f یک تابع بولی n متغیره از متغیر های $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *باشد دراین* صورت:

الف) هر متغیر x_i یا $\acute{x}_i$ برای $1 \leq i \leq n$ یک لیترال نامیده می شود.

ب) هرعبارت حاصل ضربی به صورت $y_1y_2 \ldots y_n$ که $y_i = x_i$ یا $y_i = \acute{x}_i$ برای $1 \leq i \leq n$ یک حاصل ضرب بنیادی نامیده می شود.

پ) هرنمایشی از f به صورت مجموع حاصل ضرب های بنیادی یک فرم مجموع نرمال یا dnf(disjunctive normal form) نامیده می شود.

توجه: با استفاده از خاصیت $x=x.1$ همواره می توان شکل dnf را برای یک تابع بولی نوشت.

مثال 24 : شکل dnf را برای تابع زیر بنویسید.

$$f : B3 \rightarrow B \quad , \quad f(x,y,z)=xy+x́z$$

حل: xy را به صورت xy.1 و x́z را به صورت x́z.1 می نویسیم. چون در xy متغیر z یا مکمل آن را نداریم، xy.1 را به صورت زیر می نویسیم

$$xy.1 =xy(z+ź)$$

به همین نحو x́z .1 *را به* صورت زیر بیان می کنیم

$$x'z .1 = x́z (y+ý)$$

این اعمال باعث می شود که عبارت حاصل ضربی در f *به حاصل ضرب های بنیادی تبدیل شوند، شکل* dnf برای تابع f *به* صورت زیر بیان می شود

$$f(x,y,z) =xy+x́z$$

$$=xy.1 + x́z.1$$

$$=xy(z+ź)+x́z(y+ý)$$

$$=xyz+xyź+x́yz+x́ýz$$

مثال 25: شکل dnf را برای تابع زیر بنویسید.

$$f(w,y,y)=wx+ý+xy$$

حل: با توجه به توضیحات بیان شده در مثال 24 داریم:

$$f(w,x,y)=wx.1+ý.1+xy.1$$

$$=wx(y+ý)+ý(x+x́)+xy(w+ẃ)$$

$$=wxy+wxý+xý+x́ý+xyw+xyẃ$$

$$=wxy+wxý+xý.1+x́ý.1+xyw+xyẃ$$

$$=wxy+wxý+xý (w+ẃ)+x́ý(w+ẃ)+xyw+xyẃ$$

$$=wxy+wxý+wxý+ẃxý+wx́ý+ẃx́ý+wxy+ẃxy$$

با استفاده از خودتوانی داریم:

$$f(w, x, y) = wxy + wxy' + w'xy' + wx'y' + w'x'y' + w'xy$$

توجه کنید که به منظور نوشتن حاصل ضرب های بنیادی به ترتیب الفبایی یعنی wxy (یا مکمل های آن ها) هرجا که لازم بوده است از خاصیت جا به جایی ضرب استفاده کرده ایم.

مثال 26 : شکل dnf رابرای تابع زیر بنویسید:

$$g(w, x, y, z) = wxy' + wyz + xy$$

حل: با توجه به توضیحات بیان شده درمثال 24 به صورت زیر عمل می کنیم

$$wxy'=wxy'(z+z')=wxy'z+wxy'z'$$

$$wyz'=w(x+x')yz=wxyz+wx'yz$$

$$xy=(w+w')xy(z+z')=wxyz+wxyz'+w'xyz+ w'xyz'$$

با استفاده از قانون خود توانی عمل + داریم:

$$g(w,x,y,z)=wxy'z+wxy'z'+wxyz'+wx'yz+wxyz+w'xyz+ w'xyz' \quad \square$$

در این قسمت هدف بیان عبارات dnf به یک شکل قرار دادی و استاندارد است. قبل از بیان این شکل قراردادی به مطلب ذیل توجه فرمایید:

سه ستون اول جدول ذیل را ملاحظه کنید. هرگاه حاصل ضرب های بنیادی را در یک dnf با رعایت ترتیب الفبایی یا ترتیب اندیس برای لیترال ها بنویسیم، مثلاً:

$$p'qrs' \ , \ abc'd' \ , \ xyz' \ , \ldots , x'_1x_2x_3$$

در این صورت مقادیر y,x و z در هر سطر معرف یک عدد دودویی خواهد بود. یعنی با کنار هم قرار دادن ارزش y, x و z از چپ به راست کنار یکدیگر، عدد سه رقمی متناظر معادل یک عدد دودویی است.

x y z	معادل دودویی	معادل ده دهی
0 0 0	000	0
0 0 1	001	1
0 1 0	010	2
0 1 1	011	3
10 0	100	4
10 1	101	5
11 0	110	6
11 1	111	7

ستون پنجم جدول فوق معادل ده دهی اعداد ستون چهارم را نشان می دهد مثلاً معادل ده دهی عدد دودویی 011 برابر 3 است. با استفاده از این مقدمه و تعارف زیر برای توابع بولی به فرم dnf یک شکل بسته ارائه خواهیم داد. ابتدا تعریف زیررا درنظر بگیرید.

تعریف : هر حاصل ضرب بنیادی یک **کمین جمله یا مین ترم** (minterm) نامیده می شود.

جدول ارزشی تابع بولی $f(x,y,z)=xy+x'z$ را در نظر بگیرید این جدول به صورت زیر بیان میشود.

x y z	x y	x'z	f
0 00	0	0	0
0 01	0	1	1
010	0	0	0
011	0	1	1
100	0	0	0
101	0	0	0
110	1	0	1
111	1	0	1

شکل dnf این تابع به صورت زیراست:

$$f(x,y,z)=xyz+xyz'+x'yz+x'y'z$$

دقت کنید که هرکدام از کمین جمله های فوق دقیقاً متناظر با حالتی است که ارزش تابع برابر 1 است. هرگاه معادل دودویی این حالت ها را برای کمین جمله های فوق در نظر بگیریم در این صورت معادل دودویی کمین جمله های f عبارت است از 110، 001، 011 و 111 و معادل ده دهی این اعداد عبارتند از: 1، 3، 6 و 7 در این صورت شکل قرار دادی زیر را برای dnf تابع f می پذیریم:

$$f = \sum m\ (1, 3, 6, 7)$$

که $\sum$ معرف کلمه مجموع و m به عنوان مین ترم مورد استفاده قرار می گیرد. البته برای نوشتن فرم بسته فوق برای یک تابع بولی نیازی به نوشتن جدول ارزشی تابع نیست، کمین جمله $x'y'z$ و 001 را درنظر بگیرید یعنی زمانی که $z=1$، $y=0$ و $x=0$ در این حالت می بینیم که ارزش $x'y'z$ برابر 1 است. همان طور که در جدول مشاهده می شود در حالت 001 برای متغیرها (به ترتیب الفبایی از چپ به راست) تابع f ارزش 1 را دارد. هرگاه 001 و $x'y'z$ را مقایسه کنید، معلوم مي شود که متناظر باهرمتغیر 1 و متناظر مکمل متغیر عدد 0 را داریم . به قرار داد زیر توجه کنید:

قرار داد: بارعایت ترتیب الفبایي یا ترتیب اندیس براي متغیر ها درشکل dnf، درهرکمین جمله براي هر متغیر 1 و براي مکمل هرمتغیر 0 قرارمي دهیم. با به دست آوردن معادل ده دهي هر کمین جمله فرم بسته $\sum_m$ را براي تابع مورد نظر مي توان نوشت.

مثال 27: براي تابع به صورت dnf زیر فرم بسته f را بنویسید.

$$f(x,y,z)=x'yz+x'yz'+xy'z$$

دودویي: $011 \quad 010 \quad 101$

ده دهي: $3 \quad 2 \quad 5$

بنابراین: $f=\sum_m(2,3,5)$ □

مثال 28: تابع $f(w,x,y) =wx+y'+xy$ را به شکل بسته dnf بنویسید.

حل: در مثال 25 شکل dnf به صورت زیر تعین شد.

$$f(w,x,y)=wxy+wxy'+w'xy'+wx'y'+w'x'y'+w'xy$$

دودویي: $111 \quad 110 \quad 010 \quad 100 \quad 000 \quad 011$

ده دهي: $7 \quad 6 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \quad 3$

بنابراین: $f=\sum m(0,2,3,4,6,7)$ □

مثال 29: هرگاه $f(x_1, x_2, x_3) = \sum m(0, 3, 5)$ را به صورت گسترده dnf بنویسید.

حل: معادل دودويي 0، 3 و 5 (يا سه رقم) به ترتيب عبارتند از: 000، 011 و 101

بنابراين: $\quad \square \quad f(x_1, x_2, x_3) = x'_1x'_2x'_3+x'_1x_2x_3+x_1x'_2x_3$

مثال 30: شكل بسته تابع g در مثال 26 را بنويسيد.

حل: $\quad \square \quad g = \sum_m(6,7,11,12,13,14,15)$

مثال 31 : سيستم چراغي را مي خواهيم با سه كليد طراحي كنيم به طوري كه هرگاه لا اقل دو كليد از آن ها فعال باشد، چراغ روشن شود شكل dnf و شكل بسته آن را براي اين سيستم بنويسيد.

حل: سه كليد مورد نظر را با متغير هاي a, b, c درنظر مي گيريم، فعال بودن كليد را با 1 و غير فعال بودن آن را با 0 نشان مي دهيم. در اين صورت جدول ارزشي اين سيستم به صورت زير بيان مي شود.

a b c	f (خروجي)
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

كمين جمله هاي مورد نظر در اين مثال عبارتند ازحالت هايي كه خروجي 1 است(سيستم روشن است) كه عبارتند از: $abc \;,\; abc' \;,\; ab'c \;,\; a'bc$

بنابراين شكل dnf عبارت است از:

$$f(a,b,c)=a'bc+ab'c+abc'+abc$$

$$f(a,b,c)=\sum_m(3,5,6,7)$$

دقت كنيد كه مثلاً در كمين جمله $a'bc$ خروجي 1 است .زيرا دراين حالت داريم $b=c=1$ و $a=0$ پس $a'=1$ بنابراين: $a'bc=1$ □

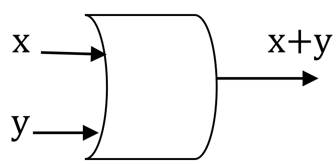
توجه: مثال 31 مقدمه اي براي معرفي مدارهاي كليدي و دريچه هاي منطقي است كه در زير به معرفي آن ها مي پردازيم.

دريچه ها و مدار هاي منطقي

توابع كليدي(بولي) معرفي شده در قسمت قبل، يك نظريه جذاب رياضي را معرفي مي كنند.

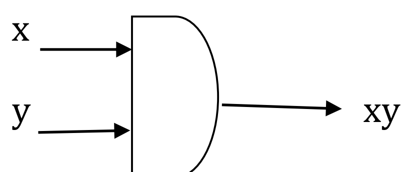
اهميت اين توابع در به كارگيري آن ها در قطعات كامپيوتري است كه وظيفه پردازش داده ها را به عهده دارند. اين قطعات دريچه هاي منطقي (logic gates) ناميده مي شوند. هدف اين قسمت، بدون وارد شدن به بحث سخت افزار، معرفي چند تا از دريچه هاي منطقي است كه عبارتند از: دريچه يا OR، دريچه AND دريچه وارونگر (inverter) NOT.

1 - دريچهً OR: نمودار دريچه OR مطابق با شكل (الف) است، اين دريچه دو ورودي و يك خروجي دارد. ورودي ها عبارتند از x و y و خروجي عبارت است از x+y.



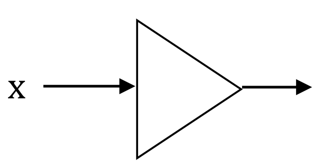
شكل (الف)

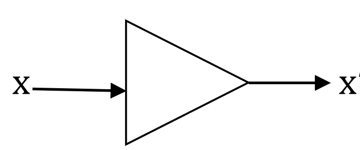
2- دريچه AND: نمودار اين دريچه مطابق با شكل (ب) است. اين دريچه دو ورودي و يك خروجي دارد. ورودي ها عبارتند از x و y و خروجي آن xy است.



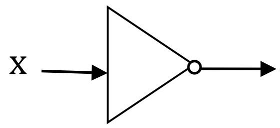
شكل (ب)

3- دريچه NOT : نمودار اين دريچه در كتاب هاي مختلف الكترونيك و كامپيوتربه صورت هاي گوناگون است، در اين بخش ما نمودار(پ3) را مورد استفاده قرار مي دهيم، اين دريچه يك ورودي و يك خروجي دارد. ورودي آن x و خروجي آن x' است.





(پ1) (پ2)

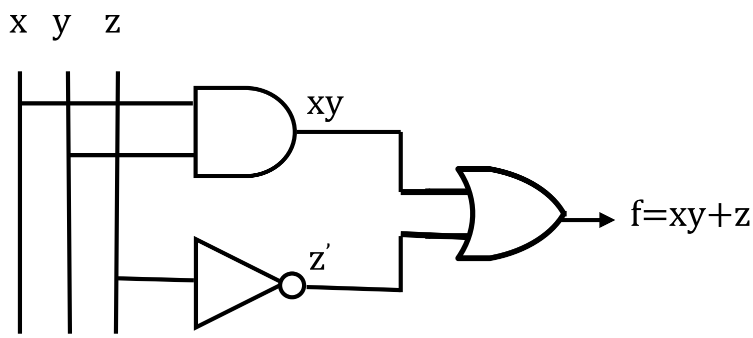


(پ3)

با تركيب دريچه هاي منطقي، مدار هاي منطقي تشكيل مي شوند. اين مدار هاي منطقي كه از چندين دريچه منطقي تشكيل شده اند، داراي چندين ورودي هستند. به مثال هاي زير توجه كنيد.

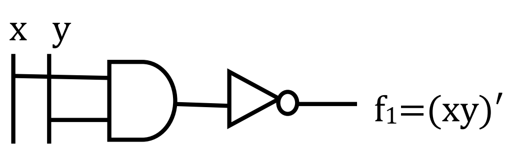
مثال 32: مدار منطقي متناظر با تابع كليدي $f(x,y,z)=xy+z'$ را رسم كنيد.

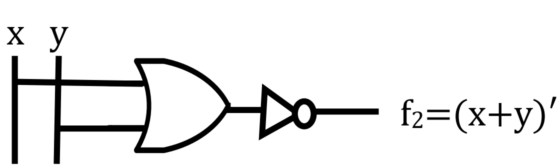
حل: تابع f داراي سه ورودي z,y,x است.



مثال 33: مدار متناظر با توابع زير را طراحي كنيد.

الف. $f_1=(xy)'$ (ب). $f_2=(x+y)'$



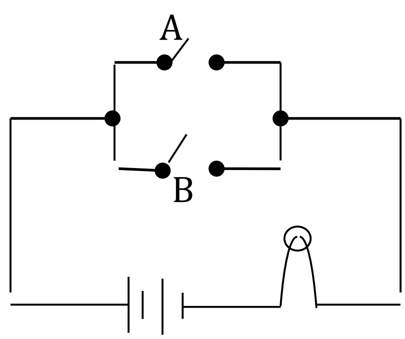


هرگاه يك مولد الكترويسيته مثلاً يك باطري و ابزاري گيرندهٔ الكتريسيته، مثلاً يك لامپ، باسيمي هادي الكتريسيته به هم وصل شده باشند و در سر راه آن ها يك يا چند كليد قطع و وصل قرار داشته باشد، مدار الكترويكي تشكيل مي دهند كه **مدار كليدي** نام دارد. هركليد واقع در چنين مداري يك ابزار دو حالتي است،

يا وصل است يا قطع. كليد تنها در حالتي كه وصل باشد جريان الكتريسيته را از خود عبور مي دهد. هر مدار منطقي ارتباطي تنگاتنگ با يك مدار كليدي دارد.

شكل ذيل مدار كليدي نظير مدار منطقي دريچه OR رانشان مي دهد.

در اين مدار كليدي، دو كليد A و B به صورت موازي در مدار قرار دارند. لامپ زماني روشن است كه يا كليد A وصل باشد يا كليد B و يا هر دو. هرگاه وصل بودن هركليد را با 1 و قطع بودن آن را با 0 نشان دهيم و A+B را درحالت روشن بودن لامپ برابر 1 و درحالت خاموش بودن لامپ برابر صفر بگيريم، چگونگي عمل مدار شكل ذيل با جدول ارزشي دريچه OR كاملاً مطابقت دارد. بنابراين ويژگي هاي مدار منطقي OR همان ويژگي هاي مدار كليدي شكل ذيل است.



تعريف : هر رقم دودويي يعني هر 0 و 1 يك بيت bit ناميده مي شود.

مدار هاي منطقي را مي توان مانند ماشين هايي در نظر گرفت كه يك يا چند ورودي و تنها يك خروجي دارند. درهر لحظه از زمان، هر يك از ورودي ها دقيقاً يك بيت از اطلاعات، يعني 0 يا 1 را روي دستگاه بار مي كند اين داده ها در دستگاه پردازش مي شوند ودر پي آن يك بيت 0 يا1 به خروجي فرستاده مي شود. داده ها به دنباله هايي ازبيت هاي 0 و 1 تبديل مي شوند به گونه اي كه تعداد بيت هاي همه دنباله ها با هم برابر است. اين دنباله هاي بيت ها به ترتيب روي ورودي ها بار شده و به دستگاه فرستاده مي شوند كه در دستگاه بيت به بيت پردازش شده و از آنجا به صورت دنباله اي با همان تعداد بيت به خروجي فرستاده مي شود.

نكته: ضرب بيت ها دقيقاً همان ضرب بولي است، يعني حاصل ضرب دوبيت a و b يعني ab داراي مقدار 1 است اگر و فقط اگر هم a و هم b داراي مقدار يك باشند.

مطلب براي جمع كمي پيچيده تراست، زيرا درجمع دودويي داريم:

$$1+1=10$$

که نتيجه اش يك بيت تنها نيست، بلكه نتيجه آن دوبيت است. بيت سمت چپ را درحاصل جمع فوق بيت حامل و بيت سمت راست را بيت مجموع مي ناميم. بيت حامل برابر 1 است، اگر و فقط اگرهر دو بيتي كه با هم جمع مي شوند، 1 باشند زيرا درجمع دودويي:

$$0+0=0 \quad ، \quad 0+1=1 \quad ، \quad 1+1=10$$

بنابراين بيت حامل را مي توان توسط حاصل ضرب دوبيتي كه با هم جمع مي شوند، نشان داد. با اين حال بيت مجموع را نمي توان با جمع بولي نشان داد، زيرا هرگاه دوبيتي كه با هم جمع مي شوند 1 باشند مقدار بيت مجموع 0 است. بنابراين بيت مجموع را بايستي با يك تابع بولي نشان داد كه مقدار اين تابع 1 است اگر و فقط اگر دقيقاً يكي از بيت هايي كه با هم جمع مي شوند 1 باشند. يك عبارت بولي براي اين منظور عبارت است از: $ab' + a'b$

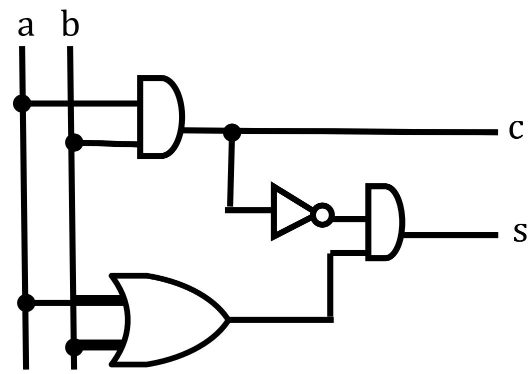
و يك عبارت ديگر به صورت زير بيان مي شود

$$(a+b)(ab)'$$

دليل اين امر رامي توان به كمك جدول ارزشي دوعبارت فوق نشان داد. هرچند دوعبارت فوق يك خروجي را توليد ميكنند ولي ما عبارت دوم را ترجيع ميدهيم. توجه كنيد كه عبارت دوم به چهار دريچه احتياج دارد كه عبارتند از دو دريچه AND يك دريچه OR و يك دريچه NOT در حالي كه عبارت اول به پنج دريچه نياز دارد، دو دريچه AND يك دريچه OR و دو دريچه NOT.

مثال 34: مداری را طراحي كنيد كه بيت هاي a و b را به عنوان ورودي گرفته و جمع (s) و حامل (c) را به عنوان بيت هاي خروجي توليد كند.

حل: با توضيحات داده شده، اين مدار به صورت زير طراحي مي شود.



هرگاه حاصل ضرب لیترال ها با هم جمع شوند گوییم عبارت به صورت مجموع حاصل ضرب ها (sum of products) است و آن رابا نماد .S.O.P نشان می دهیم. تعریف دقیق S.O.P رابعدازمثال 36 ارائه می دهیم.

مثال 35: عبارات زیر به صورت S.O.P *هستند.*

الف. $x+y+\acute{z}$. زیرا هرحاصل ضرب شامل یک لیترال است و این لیترال ها با هم جمع شده اند.

ب . $x\acute{z}$ **پ.** $xy+z\acute{x}$

مثال 36: عبارت $xy+z\acute{x}+xy\acute{z}w$ را به صورت .S.O.P بیان کنید.

حل: با استفاده از قانون جذب داریم: $xy+xy\acute{z}w= xy$

بنابراین عبارت اولیه به عبارت زیر تبدیل می شود:

$$xy+z\acute{x}$$

وعبارت بالا به صورت .S.O.P است.

ایده ی مثال بالا اولین قدم به سمت می نیمم سازی عبارات بولی است. هرگاه یک عبارت دلخواه را بتوان به شکل مجموع حاصل ضرب ها نوشت، آن گاه به کمک قانون جذب می توان آن را بیشتر کاهش داد.

ابتدا به تعریف دقیق شکل .S.O.P برای یک عبارت بولی می پردازیم.

تعریف. یک عبارت بولی به شکلS.O.P است هرگاه

الف. یک لیترال باشد.

ب. حاصل ضرب لیترال های متفاوت باشد.

پ. هرگاه E_1 و E_2 حاصل ضرب هایی از لیترال های متفاوت باشند در این صورت E_1+E_2 به شکل S.O.P. است مشروط به این که نه E_1 ، E_2 راجذب کند و نه E_2،E_1 را جذب کند.

مثال 37: نشان دهید $x+y\acute{z}w$ به شکل S.O.P. است.

حل: با توجه به قسمت (الف) و(ب) تعریف بالا واضح است که x و $y\acute{z}w$ *به* شکل S.O.P. هستند و ازقسمت (پ) تعریف فوق نتیجه می شود که $x+y\acute{z}w$ نیز به شکل S.O.P. است.

مثال 38: آیا $x+yw+y\acute{z}w$ به شکل S.O.P است.

حل: خیر، زیرا yw عبارت $y\acute{z}w$ را جذب می کند.

□ (بنابه قانون جذب) $yw+y\acute{z}w=yw+yw\acute{z}=yw$

توجه : عبارت زیر را در نظر بگیرید.

$$f=xyz+\acute{x}y\acute{z}$$

هرکدام ازعبارت های xyz و $\acute{x}y\acute{z}$ عبارت های حاصل ضربی از سه لیترال هستند که این حاصل ضرب ها با هم جمع " + " شده اند و ما اصطلاح مجموع حاصل ضرب ها را در این مورد به کارمی بریم.

در مثال های زیر نشان می دهیم که چگونه می توان عبارت های بولی را به صورت S.O.P. تبدیل نمود.

مثال 39: عبارت بولی$(xy+\acute{z})'$ را به صورت S.O.P. *بنویسید.*

حل:

(بنابر قانون دمورگان) $(xy+\acute{z})'=(xy)'(\acute{z})'$

(بنابر مکمل مکمل) $=(xy)'z$

(بنابر قانون دمورگان) $=(\acute{x}+\acute{y})z$

(بنابر خاصیت توزیع پذیری) $=\acute{x}z+\acute{y}z$

چون عبارت فوق به شکل مجموع حاصل ضرب ها است و قانون جذب نمی تواند مورد استفاده قرار گیرد لذا $(xy+\acute{z})'$ دارای شکل S.O.P. زیر است:

$\acute{x}z+\acute{y}z$ □

مثال 40 : عبارت $z((\acute{x}+z)'+(\acute{y}+\acute{z})')$ را به شکل S.O.P. تبدیل کنید.

حل:

(بنابر قانون دمورگان) $z((\acute{x}+z)'+(\acute{y}+\acute{z})')=z((\acute{x})'\acute{z}+(\acute{y})'(\acute{z})')$

(بنابر مکمل مکمل) $=z(x\acute{z}+yz)$

(بنابر خاصیت توزیع پذیری) $=zx\acute{z}+zyz$

(بنابر خاصیت جا به جایی) $=z\acute{z}x+zzy$

(بنابر مکمل و خوتوانی) $=0.x+zy$

(بنابرخاصیت تسلط) $=0+zy$

□ (بنابرخنثی بودن 0) $= yz$

مثال 41: عبارت $x\acute{y}(\acute{y}\acute{w})'+w\acute{y}$ را به شکل S.O.P. تبدیل کنید.

حل:

(بنابرقانون دمورگان و مکمل مکمل) $x\acute{y}(\acute{y}\acute{w})'+w\acute{y}=x\acute{y}(y+w)+w\acute{y}$

(بنابر خاصیت توزیع پذیری) $=x\acute{y}y+x\acute{y}w+wy'$

(بنابرخاصیت مکمل) $=0+x\acute{y}w+wy'$

(عضوخنثی) $=x\acute{y}w+\acute{y}w$

عبارت آخر به صورت مجموع حاصل ضرب ها است، اما دقت کنید که $\acute{y}w$ عبارت $x\acute{y}w$ را جذب می کند، لذا شکل نهایی S.O.P. عبارت است از:

$\acute{y}w$ □

عبارت $\acute{x}yz+xy+\acute{x}y\acute{z}$ را در نظر بگیرید که شکل S.O.P. است و قانون جذب را نمی توان در این عبارت استفاده نمود. اما با استفاده از سایر قوانین، می توان این عبارت را کاهش داد، به روابط زیر توجه کنید:

$$\acute{x}yz+xy+\acute{x}y\acute{z}=\acute{x}yz+\acute{x}y\acute{z}+xy=\acute{x}y(z+\acute{z})+xy$$

$$=\acute{x}y+xy=(\acute{x}+x)y=y$$

بنابراین می توان با استفاده از قوانین جبربولی یک عبارت بولی را کاهش داد. یعنی آن را به طریقی ساده تر نمود و این مقدمه ای برای عنوان کردن بحث ساده کردن عبارات بولی است که تحت عنوان ساده کردن مدار های منطقی در بخش بعد مورد بررسی قرار گرفته است.

مجموعه مسائل

1) مقدار هر یک از عبارات بولی زیر را تعیین کنید هرگاه داشته باشیم $w=x=1$ و $y=z=0$

الف. $(xy)'+x'y'$ ب. $w+x'y$

پ. $wx+y'+yz$ ت. $wx+xy+yz$

ث. $(wx+yz')+wy'+((w+y)(x'y))'$

جواب: الف.1 ب.1 پ.1 ت.1 ث.1

2) فرض کنید $f : B^3 \rightarrow B$ با $f(x,y,z)=((x+y)'+x'z)'$ تعریف شده باشد شکل dnf تابع f را بنویسید.

جواب: $f=xyz+xy'z+xy'z'+xyz'+x'y'z'$

3) هریک از تابع های بولی زیر را به شکل dnf بنویسید. در هر قسمت یک تابع سه متغیره در نظر بگیرید.

الف. $x(xy'+x'y+y'z)$ ب. $(x'y)'(x'+xyz')$

پ. $(x+y'z)(y+z')$ ت. $(x+y)'(xy')'$

ث. $(x'+y)'+y'z$ ج. $y(x+yz)'$

جواب: الف. $xy'z'+xy'z$ ب. $xyz'+x'y'z+x'y'z'$

پ. $xyz+xyz'+xy'z'$ ت. $x'y'z+x'y'z'$

ث. $xy'z+xy'z'+x'y'z$ ج. $x'yz'$

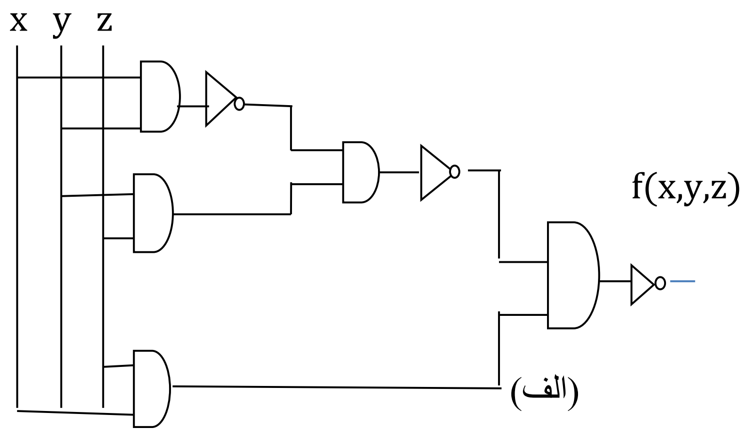
4) شکل dnf گسترده تابع زیر را بنویسید.

$$f(w,x,y,z)=\sum m(4,5,7,8,9,11)$$

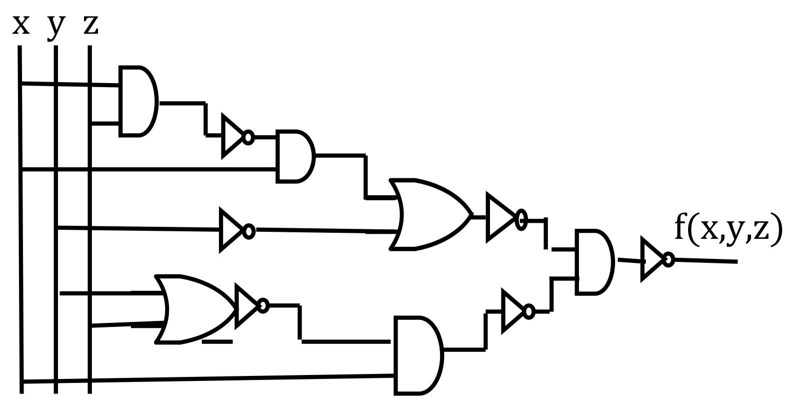
جواب: $f(w,x,y,z)=w'xy'z+w'xyz+wx'y'z'+wx'y'z+wx'yz+w'xy'z'$

دقت کنید که در این مسأله مثلاً داریم $w'xy'z\equiv 0101$ که اگر آن را یک عدد دودویی در نظر بگیریم معادل ده دهی آن عدد 5 است.

5) توابع متناظر با مدار های زیر را تعیین کنید.



(الف)



(ب)

جواب:الف. $(((xy)'+yz)'(xz))'$ ب. $(((xz)'x+y')'((y+z)'x)')'$

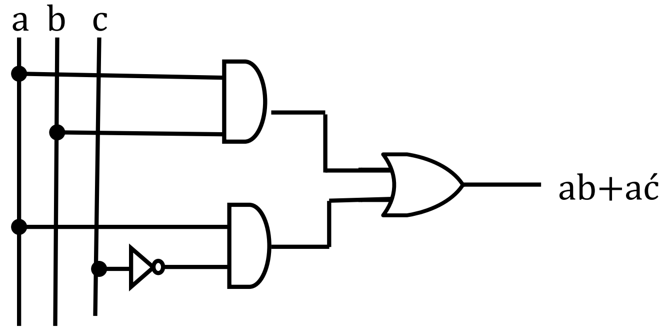
ساده کردن مدار های منطقی

توابع بولی مینیمال

می دانیم هر تابع بولی E دارای نموداری به صورت یک مدارمنطقی است. دراین قسمت به بررسی این موضوع می پردازیم که، چه باید کرد تا این نمودار شکلی می نیمال دشته باشد. یعنی از لحاظ سادگی، به ساده ترین شکل ممکن باشد؟

کلمه می نیمال فقط به مفهوم می نیمال نسبت به یک شکل خاص از تابع مورد نظر است، که در اینجا فقط فرم .S.O.P مورد نظر است. درمورد مدارها، این شکل عبارت های بولی به نام دریچه دو سطحی و- یا (two- level AND-OR gate) نیز نامیده می شود. علت آن، شکل خاصی است که این مدارها

دارند. عبارت $ab+ac'$ را در نظر بگیرید که به صورت مجموعی از حاصل ضرب ها است، مدار این عبارت بولی به صورت زیر است.



سطح AND سطح OR

دقت کنید که دریچه های سمت چپ، همگی دریچه های AND و دریچه سمت راست یک دریچه OR است که روی دریچه های AND عمل کرده است.

می نیمال یک تابع بولی را نسبت به فرم مجموع حاصل ضرب ها در نظر می گیریم. توجه کنید که عبارت $ab+ac'$ به فرم S.O.P است و به این صورت، دیگر قابل ساده تر شدن نیست. این عبارت به دو دریچه ی AND یک دریچه OR و یک دریچه NOT نیاز دارد. حال اگر از قانون توزیع پذیری استفاده کنیم این عبارت به صورت

$$a(b+c')$$

بیان می شود که تنها به یک دریچهً AND یک دریچه OR و یک دریچهً NOT نیازدارد، که کمتر از دریچه های مورد نیاز برای عبارت قبلی است. ولی این عبارت به فرم .S.O.P نیست. بنابراین مورد نظر ما نخواهد بود. ابتدا باید معلوم کنیم که یک .S.O.P چه موقع می نیمال نامیده می شود. هرگاه E عبارتی بولی به صورت .S.O.P باشد ، تعداد لیترال های موجود در E را با E_L وتعداد عملوند های موجود در E را با Es نشان می دهیم، مثلاً فرض کنید

$$E=abc'+a'b'd+ab'c'd+a'bcd$$

در این صورت داریم:

$$E_L=14 \qquad , \qquad E_s=4$$

(درعبارت $x+y$ به x و y عملوند (operand) و به + عملگر (operator) می گوییم). هرگاه E و F دوعبارت بولی به صورت .S.O.P و معادل باشند، یعنی $E=F$ و داشته باشیم .

$$E_L \leq F_L \quad , \qquad E_S \leq F_S$$

به طوری که حداقل یکی از نماد های $\leq$ به صورت $<$ باشد، عبارت E را ساده تر از عبارت F می گوییم.

مثال 42 : تعداد لیترال ها وعمگرها را در یکی ازعبارت های بولی زیر حساب کنید.

الف. $E=x\acute{y}z+\acute{x}\acute{z}+y\acute{z}+x$

ب. $F=\acute{x}\acute{y}z+xyz+y+y\acute{z}+\acute{x}z$

پ. $G=xy\acute{t}+\acute{x}\acute{y}zt+x\acute{z}t$

حل: با شمارش تعداد لیترال ها وعملوندها در هر عبارت خواهیم داشت:

$$E_L=8 \; , \; E_s=4 \;\; , \; F_L=11 \; , \; F_s=5 \; , \; G_L=10 \; , \; G_s=3$$

مثال 43: E_L و E_s را برای عبارت زیر تعیین کنید.

$$E=(x\acute{y}+z)' +x\acute{y}$$

حل: عبارت داده شده به صورت .S.O.P نیست و E_L و E_s را نمی توان برای آن تعیین نمود. □

تعریف. عبارت بولی E را عبارت .S.O.P می نیمال می نامیم، هرگاه به صورت .S.O.P بوده و هیچ عبارت بولی به شکل .S.O.P معادل با آن و ساده تر از آن وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر، یک عبارت بولی .S.O.P وقتی می نیمال است که هم تعداد لیترال های موجود در آن و هم تعداد عملوند های آن کمترین باشد.

هدف می نیمم سازی توابع بولی

از آنجا که چندین عبارت متفاوت می توانند یک تابع بولی را نمایش دهند، درمدار های کلیدی عبارتی مورد توجه است که می نیمال باشد. به خصوص اگر این مدار در طراحی ساختمان کامپیوتر چندین بار مورد استفاده قرارگیرد. بنابراین داشتن روش های قابل دسترسی برای تعیین یک عبارت می نیمال جهت نمایش یک تابع بولی داده شده مفید خواهد بود.

روش های زیادی برای می نیمال سازی توابع بولی وجوددارد. متداول ترین آن ها استفاده از مفهوم استلزام اول (prime implicant) است. هرگاه $A=\{a_1,...,a_n\}$ ست ای از عبارات بولی باشد، گوییم عبارت بولی b کاملاً A را می پوشاند اگر برای هر $x \in A$ داشته باشیم $b+x=b$. این بدین معنی است که

x حاصل ضرب b با عبارت دیگری مثلاً c است مانند $x=bc$ در این صورت

$$b+x=b+bc=b.1+bc=b(1+c)=b$$

عموماً جملات پوششی(مانند b در اینجا) نسبت به جملاتی که می پوشاند (مانند x در اینجا) متغیر های کمتری دارند. برای مثال ab و $a\acute{b}$ هر دو توسط a پوشانده می شوند یعنی a ست $\{ab,a\acute{b}\}$ را می پوشاند.

البته هر ست ای دارای یک پوشش نیست مثلاً $\{ab ,\acute{a}\acute{b}\}$ دارای پوشش نیست.

تعریف. یک استلزام اول، یک جمله پوششی است که یک مجموعه ماکزیمال از جملات را می پوشاند.

توجه: منظور از جمله (term) در عبارات و تعریف فوق، هر حاصل ضربی از لیترال ها است مانند $\acute{x}\acute{z}$, xy و... روشی که در اکثر الگوریتم های می نیمال سازی به کار می رود عبارت است از تعیین استلزام های اول و سپس حذف جملات غیر ضروری تا جایی که به یک ست می نیمال از جملات برسیم که تمام مقادیر ست اولیه را اختیار می کند. یعنی معادل عبارت اولیه باشد.

مثال 44: شکل S.O.P می نیمال معادل با عبارت بولی زیر را تعیین کنید.

$$Pq+pr+\acute{q}r$$

حل: عبارت داده شده شامل سه جمله ی pq، pr و $\acute{q}r$ است. لذا برای یافتن استلزام های اول بایستی 2^3-1 ست از جملات مورد بررسی قرار گیرند(2^3-1 تعداد سب ست های ناتهی این سه جمله، به صورت یک ست سه عضوی است). با این کار مشاهده می شود که بیشتر این مجموعه ها دارای استلزام اول نیستند. درواقع تنها استلزام های اول جملات اولیه pr، pq و $\acute{q}r$ هستند که هر کدام فقط خود شان را می پوشانند. ولی این به معنی می نیمال بودن عبارت اولیه نیست. به منظور یافتن عبارت می نیمال مورد نظر، باید شکل dnf عبارت داده شده را که گاهی شکل .S.O.P کامل نیز نامیده می شود، نوشت. در این صورت

$$pq+pr+\acute{q}r=(pqr+pq\acute{r})+(pqr+p\acute{q}r)+(p\acute{q}r+\acute{p}\acute{q}r)$$
$$=pqr+pq\acute{r}+p\acute{q}r+\acute{p}\acute{q}r$$

عبارت dnf به دست آمده دارای چهار جمله است و برای یافتن استلزام های اول بایستی 2^4-1 ست را مورد بررسی قرارداد. دو تا ازاین ست ها دارای جملات پوششی هستند که عبارتند از:

$\{pqr ,pq\acute{r}\}$ که توسط pq پوشانده می شود.

$\{p\acute{q}r ,\acute{p}\acute{q}r\}$ که توسط $\acute{q}r$ پوشانده می شود.

دو ست فوق شامل تمام عبارت ها در فرم dnf عبارت داده شده هستند. بنابراین جمله ی میانی pr درعبارت داده شده اولیه اضافی است و عبارت می نیمال مورد نظر عبارت است از:

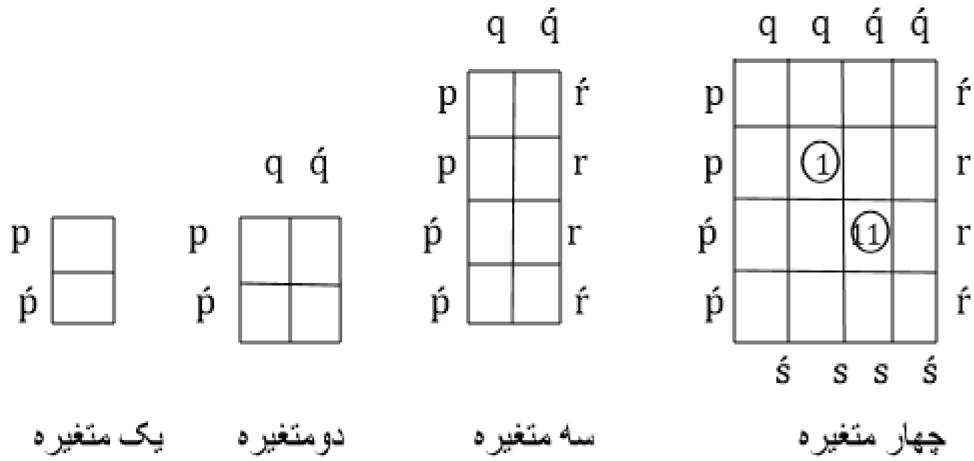
$$pq+\acute{q}r$$

معادل بودن عبارت اولیه $pq+pr+\acute{q}r$ و عبارت می نیمال $pq+\acute{q}r$ را می توان به کمک جدول ارزشی نشان داد.

نقشهٔ کارنو (Karnaugh map)

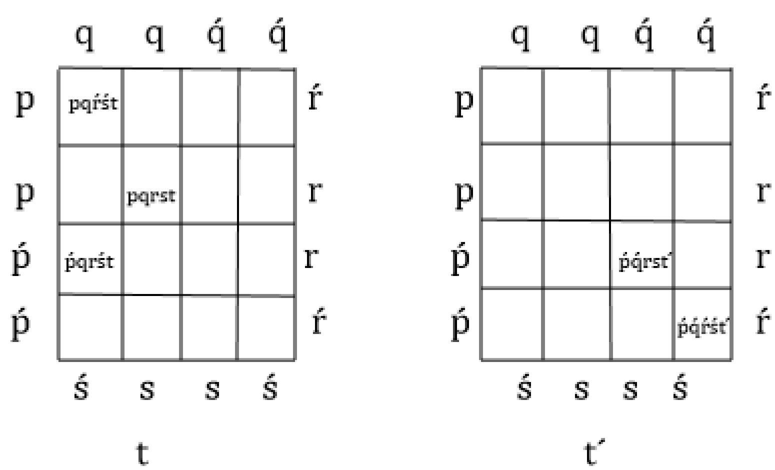
پیدا کدن استلزام های اول می تواند بسیار وقت گیر و طولانی باشد(به مثال 44 توجه کنید) به خصوص وقتی تعداد جملات عبارت زیاد باشد. به عنوان مثال اگر یک عبارت dnf دارای n جمله باشد باید تعداد 2^n-1 ست را برای یافتن استلزام های اول مورد بررسی قرارداد که این عمل برای n های بزرگ بسیار وقت گیر است. درحالتی که یک عبارت بولی بیش از 6 متغیر نداشته باشد، برای یافتن استلزام های اول و یافتن عبارت می نیمال آن، می توان ابزاری تصویری را به کاربرد که **نقشهٔ کارنو** یا **نمودار کارنو** نامیده می شود. بررسی عبارت های شش متغیره بسیار پیچیده است، لذا نقشه کارنو را برای عبارت های یک تا پنج متغیره بررسی می کنیم.

نقشهٔ کارنو یک وسیله ساده برای می نیمم سازی عبارات بولی با چند متغیر است. نقشه از یک مستطیل، که به مربع هایی تقسیم شده، تشکیل می گردد. هر مربع نشان دهنده یک حاصل ضرب بنیادی است و مربع ها طوری مرتب شده اند که مربع های مجاور دقیقاً در یک متغیر مکمل شده یا نشده متفاوت هستند. نقشه کارنو را باید به صورت پوشش رویه ی یک کره تصور کرد. درنتیجه مربع های روی لبه های مخالف نقشه، مجاور یکد یگرهستند. نقشه کارنو برای یک، دو، سه و چهار متغیردر زیر نشان داده شده.



در این نقشه ها یک مربع بخصوص نمایش حاصل ضرب لیترال هایی است که روی لبه های مستطیل متناظر با آن مربع هستند. مثلاً مربع (I) در نقشه چهار متغیره نمایش حاصل ضرب بنیادی pqrs است، زیرا لیترال های روی لبه های مستطیل متناظر با مربع(I) عبارتند از لیترال های r,q,p و s. به طور مشابه مربع (II) متناظر با حاصل ضرب بنیادی ṕq́rs است.

توجه کنید که تعداد مربع های هر نقشه برابر با 2^n است که n تعداد متغیر های مربوط به آن نقشه است، زیرا هر متغیر دارای دو حالت(x یا $x́$) است. بنابراین نقشه کارنو پنج متغیره دارای 32 مربع خواهد بود که برای نمایش آن از دو نقشه چهار متغیره استفاده می شود که هرکدام از آن ها متناظر با پنج متغیر هستند. شکل زیر نقشه کارنو پنج متغیره را نشان می دهد.



متغیر پنجم یعنی t بر روی یکی از نقشه ها به صورت t و برروی دیگری به صورت مکمل شده(t') است. به عنوان نمونه چند تا از حاصل ضرب های بنیادی برای این نقشه، در مربع های نقشه نوشته شده اند. به منظور استفاده از نقشه کارنو برای به دست آوردن می نیمم یک عبارت .S.O.P ، ابتدا نحوه ی قراردادن اطلاعات متناظر با یک عبارت بولی را در دورن نقشه بیان می کنیم. نظر به این که حالت های یک متغیره ساده هستند معمولاً این حالت ها درنظر گرفته نمی شوند. هم چنین به علت پیچیدگی استفاده از نقشه کارنو در توابع پنج متغیره، تنها حالت های سه و چهار متغیره را مورد بررسی قرار می دهیم.

برای وارد نمودن یک تابع بولی در نقشه، چون هر مربع در نقشه متناظر با یک حاصل ضرب بنیادی است، بنابراین ابتدا باید تابع بولی داده شده را به صورت dnf یا .S.O.P کامل نوشت و دراین صورت تمام جملات تابع به حاصل ضرب های بنیادی تبدیل شده و می توان آن ها را در مربع های متناظر شان قرار داد. چون نوشتن هر حاصل ضرب بنیادی درون مربع مربوطه می تواند نقشه را پیچیده کند، معمولاً متناظر با هر حاصل ضرب بنیادی عدد1 ویا علامت √ رادرون مربع مربوطه قرارمی دهیم.

مثال 45: نقشه کارنو تابع زیر را مشخص کنید.

$$f(p,q,r)=\acute{p}\acute{q}\acute{r}+\acute{p}qr+p\acute{q}r+pqr$$

حل: تابع داده شده به صورت S.O.P. کامل است. نقشه مورد نظر به صورت زیر است.

	q	q́	
p			ŕ
p	1	1	r
ṕ	1		r
ṕ	1		ŕ

(الف)

	q	q	
p			ŕ
p	√	√	r
ṕ	√		r
ṕ	√		ŕ

(ب)

توجه : در استفاده از اسامی متغیر ها کاملاً آزاد هستیم، تنها مطلبی که بایستی رعایت شود این است که متغیر های یک تابع بایستی به صورتی که بر روی نقشه های یک متغیره تا پنج متغیره بیان شده، نوشته شوند.

مثال 46: نقشه کارنو را برای تابع زیر مشخص کنید.

$$f(x_1, x_2, x_3)=\sum_m(1, 2, 4, 6, 7)$$

حل: فرم گسترده این تابع عبارت است از:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\acute{x}_1\acute{x}_2x_3+\acute{x}_1x_2\acute{x}_3+x_1\acute{x}_2\acute{x}_3+x_1x_2\acute{x}_3+x_1x_2x_3$$

بنابراین نقشه کارنو به صورت زیر مشخص می شود.

	x_2	$\acute{x}_2$	
x1	1	1	x́3
x1	1		x3
x́1		1	x3
x́1	1		x́3

مثال 47: نقشه کارنو تابع زیر را به دست آورید.

$$f(a,b,c,d)=\acute{a}\acute{b}\acute{c}\acute{d}+a\acute{b}\acute{c}d+\acute{a}b\acute{c}d+ab\acute{c}\acute{d}+\acute{a}b\acute{c}\acute{d}+a\acute{b}\acute{c}\acute{d}$$

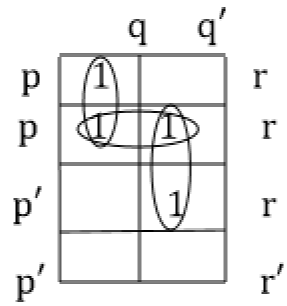
حل: تابع به صورت .S.O.P کامل یا dnf است.

	b	b	b́	b́	
a	1		1	1	ć
a					c
á					c
á	1	1		1	ć
	d́	d	d	d́	

مثال 48: نقشه کارنو تابع $f=pq+pr+\acute{q}r$ را به دست آورید.

حل: شکل dnf یا .S.O.P کامل این تابع عبارت است از:

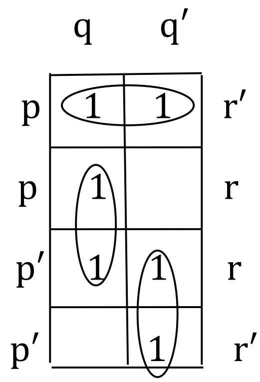
$$f(p,q,r)=pq\acute{r}+pqr+p\acute{q}r+p'q'r$$



می دانیم که برای به دست آوردن فرم می نیمال یک تابع بولی بایستی استلزام های اول را برای جملات آن پیدا کنیم. دریک نقشه کارنو بنابر خاصیت مربع های مجاور، استلزام های اول به شکل بیشترین تعداد مربع های مجاور شامل 2^n مربع برای n صحیح و نامنفی هستند که تماماً با 1 پر شده اند، حلقه های رسم شده درنقشه کارنومثال 48 راملاحظه کنید. اولاً دوتا از 1 ها درنقشه توسط دو حلقه پوشانده شده اند، بنابراین حلقه افقی رسم شده در نقشه زیادی است یعنی می توانیم حلقه افقی را حذف کنیم و درعین حال یک پوشش کامل برای 1 ها توسط حلقه های عمودی باقی می ماند. حاصل ضرب هاي بنيادي متناظر با 1 هاي حلقه سمت چپ عبارتند از $\{pqr', pqr\}$ که این مجموعه توسط pq پوشش داده مي شود. با توجه به نقشه ملاحظه مي شودكه pq حاصل ضرب ليترال هايي بر روي نقشه است كه در هردو مربع متناظر با 1 هاي درون حلقه سمت چپ تكرار شده اند. بنابراين حلقه سمت راست متناظر با $q'r$ است. زيرا q' و r درارتباط با هر دو مربع متناظر با 1 هاي درون حلقه سمت چپ هستند. بنابراين عبارت S.O.P. مي نيمال متناظر با نقشه كارنو مثال بالا عبارت است از:

$$Pq+q'r$$

مثال 49 : عبارت مي نيمال معادل با نقشه كارنوي زير را تعيين كنيد.

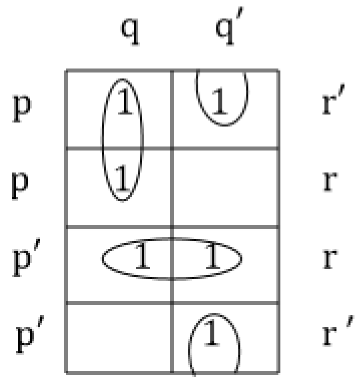


حل: با سه حلقه تمام 1 ها پوشش داده مي شوند. حلقه بالايي نشان دهنده pr' حلقه وسط (سمت چپ) نشان دهنده qr و حلقه پايين (سمت راست) نشان دهنده $p'q'$ است. بنابراين عبارت مي نيمال معادل با نقشه فوق عبارت است از:

$$pr' + qr + p'q' \qquad \square$$

توجه: لازم به توضيح است كه 1 هاي درون نقشه را مي توان به طرق مختلفي با هم درنظر گرفت به مثال زير توجه كنيد.

مثال 50 : يك عبارت مي نيمال ديگر، معادل با نقشه مثال 49 به دست آوريد.



حل: چون مربع هاي روي لبه نقشه مجاور هستند، بنابراين به طريق نشان داده شده نيز مي توان 1 هاي درون مربع ها را با هم تركيب كرد. كه در اين حالت نيز سه حلقه وجود دارد و منظور از نيم حلقه مربع هاي بالا و پايين اين است كه اين دو مربع درون يك حلقه قرار دارند. بنابراين عبارت مي نيمال در اين حالت عبارت است از:

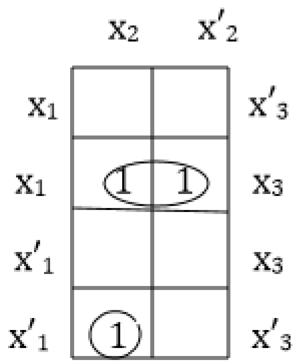
$$pq + p'r + q'r'$$

توجه: هرگاه عبارت مثال 49 را با E وعبارت مثال 50 را با F نشان دهيم در اين صورت E=F و

$$E_L = F_L = 6 \quad ، \quad E_S = F_S = 3$$

يعني تعداد ليترال ها و تعداد عملوند ها در هر دوعبارت يكسان است.

مثال 51: عبارت مي نيمال معادل با نقشه كارنوي زير را به دست آوريد.

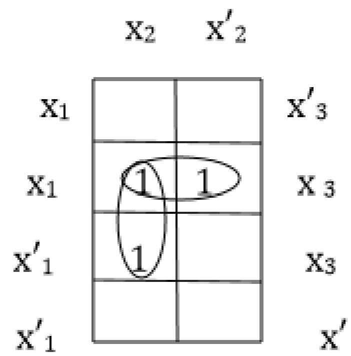


حل: اين نقشه به دو حلقه نياز دارد كه در شكل نشان داده شده اند وعبارت مي نيمال به صورت زيراست:

$$x_1x_3 + x'_1x_2x'_3 \qquad \square$$

با استفاده از تعريف استلزام اول، سعي بر آن است تا بتوانيم مربع هاي شامل 1 را بيشتر با هم تركيب كنيم بعضي مواقع مي توان يك مربع شامل 1 را در چند حلقه در نظرگرفت، به مثال زير در اين مورد توجه كنيد.

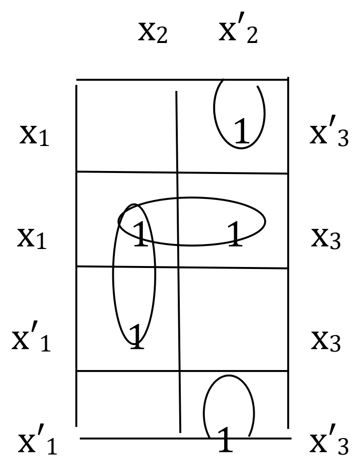
مثال 52: عبارت مي نيمال معادل با نقشه زير را به دست آوريد.



حل: عبارت مي نيمال عبارت است از:

$x_2x_3+x_1x_3$ □

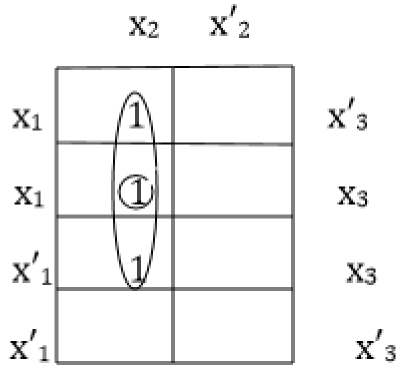
مثال53: عبارت مي نيمال معادل با نقشه زيررا به دست آوريد.



حل: عبارت مي نيمال عبارت است از:

$x_2x_3+x_1x_3+x'_2x'_3$ □

مثال 54 : عبارت مي نيمال معادل با نقشه زير را به دست آوريد.

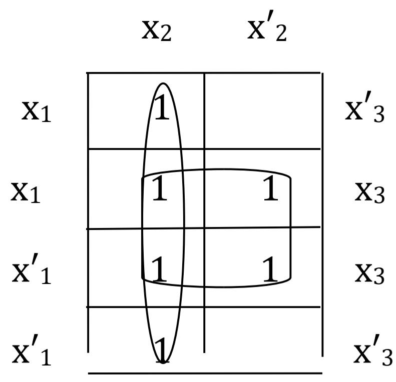


حل: دراین حالت به دو حلقه نیاز داریم وعبارت مي نيمال عبارت است از:

$$x_1x_2+x_2x_3 \qquad \square$$

همان طور که مثال هاي فوق نشان مي دهد، گرفتن حلقه ها براي پيدا نمودن استلزام هاي اول به کمي دقت و تمرين نياز دارد. تنها نکته مهم در این مورد آن است که زماني عبارت مي نيمال به دست خواهد آمد که حلقه ها را مناسب اختيار کرده باشيم. همان طور که قبلاً بیان شد، استلزام هاي اول به شکل بيشترين تعداد مربع هاي مجاور شامل 2^n مربع براي $n \geq 0$ وصحيح است. به منظورآشنايي بيشتر با انتخاب حلقه ها دورن يك نقشه كارنو، چند مثال ديگر از حالت هاي سه و چهار متغيره را ارائه مي نماييم.

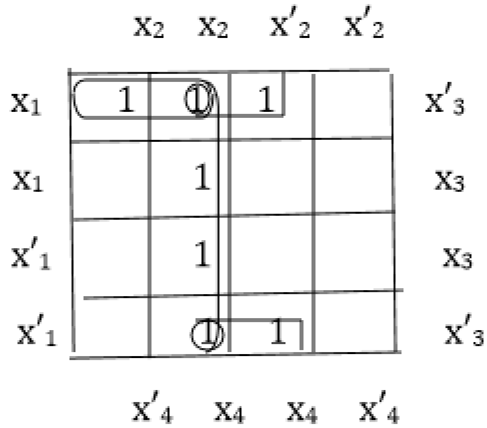
مثال 55: عبارت مي نيمال معادله با نقشه زير را به دست آوريد.



حل: اين نقشه به دو حلقه نياز دارد كه هر كدام چهارتا1 را مي پوشانند، حلقه سمت چپ نشان دهندهٔ x_2 است، چون تنها x_2 است که در هرچهار مربع درون حلقه سمت چپ ثابت مانده و تکرار شده است. هم چنين چون در حلقه مياني تنها ليترالي كه در تمام مربع هاي اين حلقه ثابت مي ماند x_3 است پس حلقه ی میانی نشان دهنده ی x_3 است. لذا عبارت مي نيمال عبارت است از:

$$x_2+x_3$$

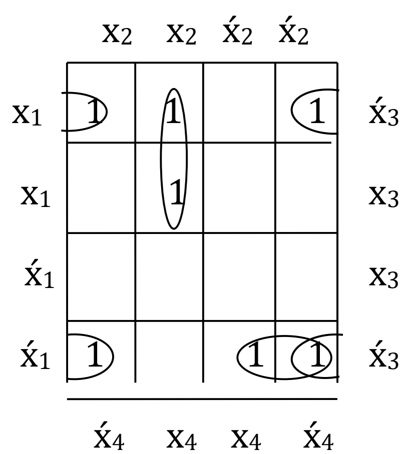
مثال 56 : عبارت مي نيمال معادل با نقشه زير را به دست آوريد.



حل: اين نقشه به سه حلقه نياز دارد كه دو تا شامل چهار 1 و يكي ازحلقه ها شامل دو 1 است، نيم حلقه های بالايي و پاييني يك حلقه را تشكيل مي دهند. ليترال هايي كه درتمام مربع هاي حلقه شامل دو تا 1 تكرار مي شوند عبارت هستند از x_1, x_2 و x'_3 به طورمشابه ليترال هاي حلقه عمودي كه در تمام مربع هاي دورن حلقه ثابت مي مانند x_2 و x_4 هستند. با بررسي مشابهي ليترال هاي ثابت درون نيم حلقه ها نيز x'_3 و x_4 هستند. لذا عبارت مي نيمال براي اين نقشه عبارت است از:

$$x_1x_2x'_3+x_2x_4+x'_3x_4$$

مثال 57 : عبارت مي نيمال براي نقشه زير را به دست آوريد.



حل: اين نقشه به سه حلقه نيازدارد كه نشان داده شده اند. چهارنيم حلقه كناری همگی یک حلقه تشكيل می دهند (به خاطر آوريد كه مربع های كناری با هم مجاورند) و نشان دهنده ی حاصل ضرب بنيادی $\acute{x}_3\acute{x}_4$ است. حلقه عمودی نشان دهندهً حاصل ضرب بنيادی $x_1x_2x_4$ وحلقه افقی (پايين) نشان دهنده ی حاصل ضرب بنيادی $\acute{x}_1\acute{x}_2\acute{x}_3$ است. بنابراين عبارت می نيمال به صورت زيراست:

$$\acute{x}_3\acute{x}_4+x_1x_2x_4+\acute{x}_1\acute{x}_2\acute{x}_3$$

مجموعه مسائل

مقادیر E_L و E_s را برای هرکدام ازعبارت های زیر حساب کنید.

الف. $E=xy+x'y'+yz'$ ب. $E=xy+x'y'$

پ. $E=xyz+xy'+x'yz$ ت. $E=xyz+xy'+zy+y'z$

جواب:الف. $E_L=6$, $E_s=3$ ب. $E_L=4$, $E_s=2$

پ. $E_L=8$, $E_s=3$ ت. $E_L=9$, $E_s=4$

2) به کمک نقشه کارنو، عبارت S.O.P. می نیمال معادل با هر یک ازعبارت های زیر را به دست آورید.

الف). $E_1(x,y,z) = xyz+xyz'+x'yz'+x'y'z$

ب). $E_2(x,y,z) = xyz+xyz'+xy'z+x'yz+x'y'z$

ث). $E_3(x,y,z)=xyz +xyz'+x'yz'+x'y'z'+x'y'z$

ت). $E_4(x,y,z,t)=xyz't+xyz't'+xy'zt+xy'zt'+x'yz't'+x'y'zt+x'y'zt'$

جواب: الف. $E_1=xy +yz'+x'y'z$ ب. $E_2=xy+z$

پ. $E_3=xy+x'z'+x'y'$ یا $E_3=xy+yz'+x'y'$

ت. $E_4=yt +x'y'+y'zt'$

مسائل تکمیلی حل شده

1) مجموعه مقسوم علیه های 70 را با D_{70} نشان می دهیم، یعنی

$$D_{70}=\{1,2,7,10,14,35,70\}$$

عمل های جمع + و ×(ضرب) و مکمل گیری ´ را روی این مجموعه به صورت زیر تعریف می کنیم، برای $a,b\in D_{70}$:

$a+b=(b , a)$کوچکترین مضرب مشرک = (1cm(a,b))

$a\times b=(b,a)$ بزرگترین مقسوم علیه مشترک =(gcd(a,b))

$a'=70/a$ (a بر 70 خارج قسمت تقسیم)

مثلاًبرای دو عضو 10 و 14 داریم:

$$10+14=70\ ,\quad 10\times14=2\ ,\ 10'=70/10=7$$

$$10+14=1cm(10,14)=70\ ,\ 10\times14=gcd(10,14)=2$$

هم چنین داریم:

$$1'=70\ \ ,\ 2'=35\ ,\ 5'=14\ ,\ 7'=10,\ldots,70'=1$$

بنابراین تمام اعضای D_{70} دارای یک مکمل منحصر به فرد هستند خواص زیر برای D_{70} و اعمال تعریف شده بر قرار است.

1 جا به جایی:

$$gcd(a,b)=gcd(b,a)$$

$$1cm(a,b)=1cm(b,a)$$

2. توزیع پذیری : به عنوان مثال $5\times(14+2)$ یعنی

$$gcd(5,1cm(2,14))=gcd(5,14)=1$$

و $$5\times2+5\times14=gcd(5,2)+gcd(5,14)=1+1=1cm(1,1)=1$$

بنابراین $$5\times(2+14)=(5\times2)+(5\times14)$$

هم چنین برای سایر اعضای D_{70} نیز می توان نشان داد که

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$

$$a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)$$

3) در D_{70} عضو1 عبارت است از 70 و عضو0 عدد 1 است زیرا برای هر $a\epsilon D_{70}$ داریم:

$$a\times70=gcd(a,70)=a$$

$$a+1=1cm(a,1)=a$$

بنابراین D_{70} دارای 0 و 1 نیز هست.

$$gcd(1,70)=1\Rightarrow1\times1'=1$$

$$gcd(2,35=1\Rightarrow2\Rightarrow2'=1$$

$$\gcd(5,14)=1 \Rightarrow 5\times 5'=1$$

$$\gcd(7,10)=1 \Rightarrow 7\times 7'=1$$

لذا برای هر $a\epsilon D_{70}$ داریم:

$a\times a'=1$ (عضو صفر D_{70})

هم چنین

$$1cm(1,70)=70 \Rightarrow 1+1'=70$$

$$1cm(2,35)=70 \Rightarrow 2+2'=70$$

$$1cm(5,14)=70 \Rightarrow 5+5'=70$$

$$1cm(7,10)=70 \Rightarrow 7+7'=70$$

بنابراین هر $a\epsilon D_{70}$ داریم:

$a+a'=70$ (عضو یک D_{70})

5) هم چنین می توان نشان داد که + و × تعریف شده دارای خاصیت شرکت پذیری نیز هستند.

بنابراین D_{70} با اعمال + و× و ´ تعریف شده یک جبر بولی تشکیل مید هد.

2) هرگاه w ،x ، y و z اعضایی از یک جبر بولی باشند، نشان دهید:

$$xy+x'y+yw+z=y+z$$

حل: $xy+x'y+yw+z=(x+x')y+yw+z=y+yw+z=y(1+w)+z=y.1+z=y+z$

3) شکل متعارفی تمام توابع بولی را تعیین کنید که بر روی یک جبربولی چهارعنصری تعریف شده و مشخصات آن در جدول زیر داده شده است.

x	y	f(x,y)
0	a	a
1	1	á
á	a	a
a	1	0

حل: شکل متعارفی توابع بولی دو متغیره f(x,y) عبارت است از:

$$f(x,y)=f_{11}xy+f_{10}xy'+f_{01}x'y+f_{00}x'y'$$

با جای گذاری مقادیر داده شده در شکل متعارفی، روابط زیر حاصل می شوند.

$(x,y)=(0,a) \quad : \quad a=f_{01}a+f_{00}a'$ (a)

$(x,y)=(1,1) \quad : \quad a'=f_{11}$ (b)

$(x,y)=(a',a) \quad : \quad a=f_{10}a'+f_{01}a$ (c)

$(x,y)=(a,1) \quad : \quad 0= f_{11}a+f_{01}a'$ (d)

حال f_{01} , f_{00} و f_{10} را تعیین می کنیم زیرا $f_{11}=a'$ معلوم است: با ضرب طرفین رابطه (a) در a خواهیم داشت:

$$f_{01}a=a$$

بنابراین

$f_{01}=a$ یا $f_{01}=1$ (e)

هم چنین با ضرب طرفین رابطه (a) در a' خواهیم داشت: $f_{00}a'=0$ بنابراین

$f_{00}=0$ یا $f_{00}=a$ (f)

باضرب طرفین رابطه (c) در a داریم:

$$f_{01}a=a$$

بنابراین

$f_{01}=a$ یا $f_{01}=1$ (g)

باضرب طرفین رابطه (c) در a' داریم:

$$f_{10}a'=0$$

بنابراین:

$f_{10}=0$ یا $f_{10}=a$ (h)

با جای گذاری (b) در (d) خواهیم داشت :

$$f_{01}a'=0$$

بنابراین:

$f_{01}=0$ یا $f_{01}=a$ (i)

از (e) و (i) نتیجه می شود:

$f_{01}=a$

بنابراین مقادیر زیر راخواهیم داشت :

$f_{11}=a'$, $f_{10}=0$ یا a , $f_{01}=a$, $f_{00}=0$ یا a

درنتیجه چهارتابع بولی با مشخصات داده شده در جدول وجود دارد که عبارتند از :

$$f(x,y)=a'xy+ax'y$$

$$f(x,y)=a'xy+ax'y+ax'y'$$

$$f(x,y)=a'xy+axy'+ax'y$$

$$f(x,y)=a'xy+axy'+ax'y+ax'y'$$

4) آیا یک تابع بولی با مشخصات داده شده در جدول زیر بر روی یک جبربولی چهار عنصری وجود دارد؟

X	y	f(x,y)
0	a	a
1	1	1
a'	a	a'
a	1	a

حل : خیر، مشابه حل مسالهٔ قبل داریم:

$$f(x,y)=f_{11}xy+f_{10}xy'+f_{01}x'y+f_{00}x'y'$$

با جای گذاری مقادیر داخل جدول در تابع فوق:

$(x,y)=(0,a)$: $a=f_{01}a+f_{00}a'$ (a)

$(x,y)=(1,1)$: $1=f_{11}$ (b)

$(x,y)=(a'a)$: $a'=f_{10}a'+f_{01}a$ (c)

$(x,y)=(a,1)$: $a=f_{11}a+f_{01}a'$ (d)

باضرب a در طرفین رابطه (a) داریم :

$$f_{01}a=a$$

بنابراین :

$f_{01}=1$ یا $f_{01}=a$ (e)

هم چنین با ضرب a در طرفین رابطه (c) داریم :

$$f_{01}a=0$$

بنابراین :

(f) $f_{01}=a'$ یا $f_{01}=0$

چون این مقادیر هیچ اشتراکی با مقادیر به دست آمده برای f_{01} در (e) ندارند بنابراین هیچ تابع بولی با مشخصات داده شده وجود ندارد.

5) عبارت می نیمال به شکل S.O .P. معادل با عبارت زیر را به کمک نقشه کارنو به دست آورید.

$$E=xyzt'+xy'zt+xy'zt'+xy'z't'+x'y'zt+xy'z't+x'y'zt'+x'y'z't+x'y'z't'$$

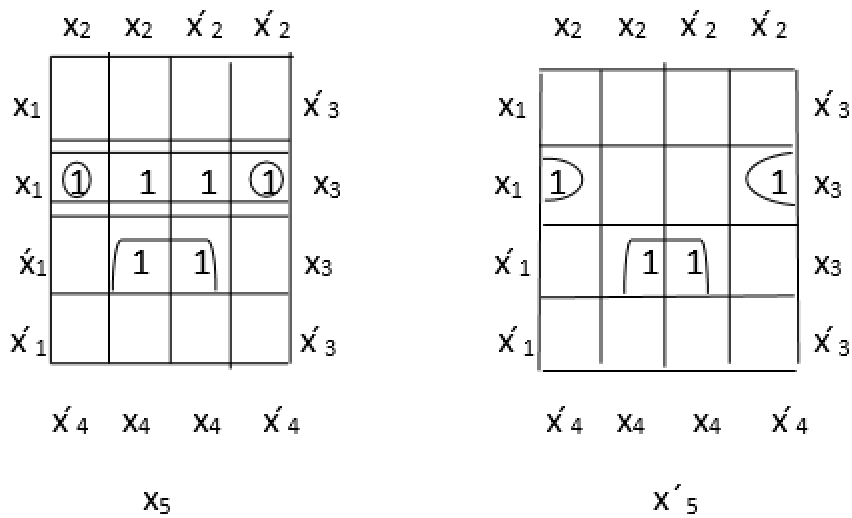
حل : نقشه کارنو معادل با عبارت فوق عبارت است از:

	y	y	y'	y'	
x			1	1	z'
x	1		1	1	z
x'			1	1	z
x'			1	1	z'
	t'	t	t	t'	

تعداد حلقه های مورد نیاز برای پوشاندن 1 ها، دوحلقه است و می نیمال E_2 عبارت است از:

$$E_2=y'+xzt'$$

6) عبارت می نیمال به شکل S.O.P. معادل با عبارت پنج متغیره ای را که در نقشه کارنو زیر نوشته شده است، تعیین کنید.



حل : همان طورکه در نقشه نشان داده شده است، برای پوشاندن 1 ها به سه حلقه نیازهست که دو تا از حلقه ها بر روی هر دو قسمت نقشه هستند وعبارت می نیمال به صورت زیر است:

$$x_1x_2x_5+x'_1x_3x_4+x_1x_3x'_4$$

منابع و مآخذ

1- اعظمی، شاهرود – زهره حبیبی، (1388) ، ساختمان گسسته، انتشارات سپاهان، تهران، ایران

2- بالا کریشنان، و. ک، (1392) ، ریاضیات گسسته مقدماتی، مترجمان: بیژن شمس، محمد علی رضوانی، ناشر: انتشارات فاطمی، تهران، ایران

3- جانسون با، ریچارد، (1380) ، ساختمان های گسسته، ترجمۀ مهندس ابراهیم زاده قلزم، انتشارات سیمای دانش، تهران، ایران

4- جکسون، بردلی – دمیتری تورو، (1393) ، مبانی ترکیبیات، ترجمۀ مهرداد مسافر، ناشر: نشر علوم ریاضی ره آورد، تهران، ایران

5- حدیقه غفاری، علیرضا - مگردیچ، تومانیان (1380) ، مقدمه ای بر ریاضیات گسسته، انتشارات دانشگاه امام حسین، تهران، ایران

6- علی آیادی، ارژنگ، (1386) ، ریاضیات گسسته، انتشارات دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

7- قمبوانی، بازیار، مریم – زهره حبیبی، (1391)، ساختمان های گسسته، انتشارات دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

8- گریمالدی، رالف، (1393) ، ریاضیات گسسته و ترکیبیاتی، ترجمۀ علی عمیدی، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ایران

9- لیپ شوتز، سیمور- مارک لارس، لیپسون، (1378) ، ریاضیات گسسته، ترجمۀ حسین ابراهیم زاده قلزم، انتشارات سیمای دانش، تهران، ایران

10- نصرآبادی، محمد مهدی، (1381) ، ریاضیات گسسته (ریاضیات ترکیبیاتی و نظریۀ گراف)، انتشارات کیومرث، تهران، ایران

11- نصیری، محمود، (1389) ، ریاضیات گسسته، ناشر: موسسۀ فرهنگی جهان رایانه کوثر، تهران، ایران

12- نیکوکار، مسعود – محمد تقی، درویش، (1389) ، ریاضیات گسسته، انتشارات گسترش علوم پایه، تهران، ایران

13- Billy, Sara, (2011), Discrete Mathematical Modeling, University of Washington

14- Bondy, J. A. Murty, U. S. R. ,(1982), Graph Theory with Application, Univesity of Waterloo, Canada

15- Bondy, J. A. Murty, U. S. R. ,(2008), Graph Theory, University of Waterloo, Canada

16- EPP, SUSANNA S. , (2004), Discrete Mathematics With Application, DePaul University

18- Dooren, Paul Van,(2009), Graph Theory and Application, Universite′ catholigue de Louvain Louvain-la-Neuve, Belgium

19- Harju, Tero, (2011), Lecture Notes on Graph Theory, Departmemt of Mathemtics, University of Turku, Finland

20- Hegde, S. M. , (2012), Labeled graphs and Digraps: Theory and Application. Dep. Of Mathematical and Computational Sciences, National Institute of Technology Karnatak, Surathkal, Srinivasnagar, INDIA

21- Koltun, Valdlen, (2008), Discrete Structures Lecture Notes, Computer Sience Department, Stanford University, USA

22- Rosen, Kenneth H, (2012), Discrete Mathematics and Its Application, McGraw-Hill, New York, USA

23- Ruohonen, Keijo, (2008), Graph Theory

24- VASUDEV, C. , (2006), Graph Theory With Application, Department of Mathematics, The Oxford Institution, Bangalore, Karanataka

25- WILSON, ROBIN J. , (1998), Introduction to Graph Theory, London